X

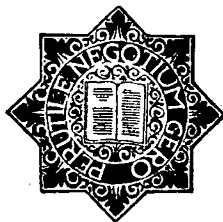
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

6e JAARGANG 1930, Nr. 4



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

HET METRIEKE STELSEL.

ANTWOORD OP HET ADRES.

MINISTERIE VAN ONDERWIJS, KUNSTEN EN WETENSCHAPPEN.

Bericht op adres van 10 Januari 1930.

Nr. 579/1 Afd. L.O.A.

Betreffende de schrijfwijze van de afkortingen van de maten en gewichten.

's-GRAVENHAGE, 5 Maart 1930.

Bij nevenvermeld adres verzoekt Gij mij het daarheen te willen leiden, dat voortaan bij het lager, middelbaar en vakonderwijs slechts gebruikt mogen worden de maten en gewichten, alsmede de verkorte schrijfwijzen daarvan, een en ander als aangegeven is op de door de Hoofdcommissie voor de normalisatie in Nederland vastgestelde normaalbladen 333 en 334.

Voor zooveel het lager onderwijs betreft kan ik aan Uw verzoek niet voldoen. Uit de vrijheid, welke de wet èn aan de openbare èn aan de bijzondere lagere scholen laat bij de inrichting van haar onderwijs, vloeit voort, dat ik mij van het geven van voorschriften op dit gebied moet onthouden.

Intusschen erken ik de wenschelijkheid, dat ook de lagere school zich zooveel mogelijk zal aanpassen bij een eenvormig gebruik van maten en gewichten en bij eene eenvormige schrijfwijze daarvan. Om dit te bevorderen heb ik tot de hoofdinspecteurs van het lager onderwijs den brief gericht, waarvan ik een afschrift hierbij voeg.

Voor zooveel het Middelbaar Onderwijs betreft heeft mijn ambtsvoorganger, bij brief van 14 Februari 1929, no. 1748, afdeeling

Aan de Heeren Prof. Dr. M. de Haas,
M. Vrij en P. Wijdenes.
adres: den heer P. Wijdenes te
Amsterdam (Zuid) Jac. Obrechtstr. 88.

V. H. M. O. aan de Inspecteurs van het Middelbaar Onderwijs in de 1ste, 2de, 3de, 4de en 5de Inspectie verzocht de rectoren, directeuren (directrices) der gymnasia, lycea en hoogere burgerscholen te wijzen op het bestaan van de normaalbladen nrs. 333 en 334.

Een afschrift van dien brief doe ik U hiernevens toekomen.

Bij schrijven van 20 Februari 1930, no. 235I, afdeeling N. O. heb ik de aandacht van de besturen der gesubsidieerde nijverheidsscholen op deze zaak gevestigd. Een afschrift daarvan wordt hierbij gevoegd.

De Minister van Onderwijs,
Kunsten en Wetenschappen,

J. TERPSTRA.

A f s c h r i f t.

MINISTERIE VAN ONDERWIJS, KUNSTEN EN WETENSCHAPPEN.

Nr. 579/2 Afd. L. O. A.

Betreffende schrijfwijze van de afkortingen van de maten en gewichten.

Aan de Hoofdinspecteurs van het Lager Onderwijs.

's-GRAVENHAGE, 5 Maart 1930.

In Februari 1927 heeft de Hoofdcommissie voor de normalisatie in Nederland onder meer een stelsel van maten en gewichten vastgesteld, dat voldoende is in het gebruik voor alle doeleinden. Het stelsel is afgedrukt op de normaalbladen 333 en 334, waarvan mijn ambtsvoorganger U een exemplaar toezond bij brief van 19 April 1928, no. 3000, afdeeling L. O. A.

Mijne aandacht is er op gevestigd, dat men bij het onderwijs, in het bijzonder bij het lager onderwijs en bij de toelatingsexamens voor het middelbaar en gymnasiaal onderwijs, naast deze maten nog verschillende andere gebruikt, die slechts daar voorkomen en die in de practijk zeer zelden of nooit toepassing vinden (b.v. MM, MM^2, DS, S, dS, cS, ML, KL, HM^3, enz.) zoodat dit eene onnoodige, zelfs schadelijke, uitbreiding moet worden geacht.

Bovendien is mijne aandacht gevestigd op de wenschelijkheid, dat er eenheid kome in de schrijfwijze van de maten en gewichten, en dat verreweg de eenvoudigste afkortingen (symbolen) die zijn, welke zijn aangegeven op de genoemde normaalbladen.

Ook mij komt het wenschelijk voor, dat ook de lagere school zich zooveel mogelijk zal aanpassen bij een eenvormig gebruik van maten en gewichten en bij eene eenvormige schrijfwijze daarvan. Dit kan worden bevorderd door bij het onderwijs op die school slechts te gebruiken de maten en gewichten en de verkorte schrijfwijze volgens de genoemde normaalbladen.

Ik heb daarom de eer U te verzoeken, op eene der eerstvolgende vergaderingen met de inspecteurs in Uwe hoofdinspectie dit onderwerp te bespreken, en daarbij na te gaan, hoe het schooltoezicht tot dat doel kan medewerken.

De Minister van Onderwijs,
Kunsten en Wetenschappen,

(get.) J. TERPSTRA.

Overeenkomstig het oorspronkelijke,

De Secretaris-Generaal van
Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen,

C. FEITH.

Afschrift.

MINISTERIE VAN ONDERWIJS, KUNSTEN EN WETENSCHAPPEN.

Nr. 1748 Afd. V. H. M. O.

Betreffende aanduiding van eenheden.

's-GRAVENHAGE, 14 Februari 1929.

De Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland heeft mij verzocht de aandacht van de verschillende inrichtingen van onderwijs te vestigen op den inhoud van de hiernevensgaande normaalbladen nrs. 333 en 334.

Ik verzoek U de rectoren, directeuren (directrices) der gymnasia, lycea en hoogere burgerscholen in Uwe inspectie op het bestaan dezer normaalbladen te wijzen, opdat ieder van hen zal kunnen nagaan, of aanschaffing dezer bladen voor het onderwijs aan zijne (hare) school van nut kan zijn.

Deze normaalbladen zijn tegen den prijs van *f* 0.15 per stuk verkrijgbaar bij de in den aanhef van dezen brief genoemde commissie (adres: Koningskade no. 23, 's-Gravenhage, gironr. 25301).

De Minister, enz.

Overeenkomstig de geparafeerde minuut,

De Secretaris-Generaal van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen,

C. FEITH.

Aan den Inspecteur van het Middelbaar Onderwijs in de 1ste, 2de, 3de, 4de en 5de Inspectie.

MINISTERIE VAN ONDERWIJS, KUNSTEN EN WETENSCHAPPEN.

Betreffende: Formulieren lesroosters enz.

No. 235I, afdeeling N. O.

'S-GRAVENHAGE, 20 Februari 1930.

Lesroosters.

Ten vervolge op het rondschrijven van 21 October 1929, no. 10360 afdeeling Nijverheidsonderwijs deel ik U mede, dat de formulieren voor de lesroosters met Toelichting, welke voortaan voor de inzending aan mijn Departement en aan de inspectie uitsluitend gebruikt moeten worden, thans verkrijgbaar zijn bij de Algemeene Landsdrukkerij. Voor zoover bij dien brief een groot formaat toelichting was gevoegd, bedrukt met leervakken, welke niet aan Uwe school worden onderwezen, moet dit aan een vergissing bij de verzending worden geweten. De navolgende formulieren zijn verkrijgbaar tegen de hierbij vermelde prijzen, welke franco-huis zijn berekend.

formulier 20: groot formaat lesrooster . . . . f 0.05

formulier 21: groot formaat toelichting bedrukt met de leervakken der nijverheidsscholen voor meisjes . . . f 0.05

formulier 21a.: groot formaat toelichting, bedrukt met de leervakken der binnenvaart- en zeevaartscholen . . . f 0.10

formulier 21b: groot formaat toelichting, bedrukt met de leervakken der ambachts-avondteeken- en speciale vakscholen . . . . f 0.05

formulier 22: klein formaat lesrooster . . . . f 0.05

formulier 23: klein formaat toelichting (niet bedrukt met leervakken) . . . . f 0.03

Ik acht het wenschelijk, dat Gij deze formulieren bij de Algemeene Landsdrukkerij betrekt. Bestellingen moeten worden opgegeven *niet* aan mijn Departement doch uitsluitend aan de Algemeene

Aan de Besturen der gesubsidieerde Nijverheidsscholen.

Landsdrukkerij, Dienst der Nederlandsche Staatscourant. De Posterijen ter plaatse van Uwe inwoning belasten zich ook met het aannemen der bestellingen.

De toezending van het bestelde geschiedt onder rembours.

De opgave, welke Gij ingevolge den bovengenoemden brief aan mijn Departement hebt verstrekt, diende uitsluitend tot raming van de oplaag en wordt niet als een bestelling beschouwd.

Ziektewet.

Mijn ambtgenoot van Arbeid, Handel en Nijverheid heeft mij bericht van oordeel te zijn, dat de Ziektewet niet van toepassing is op het personeel (directeur, leerkrachten, administratief en bedienend personeel) van ingevolge de Nijverheidsonderwijswet gesubsidieerde nijverheidsscholen.

Normalisatie.

Voor zooveel noodig vestig ik Uwe aandacht op de uitgaven van het Centraal Normalisatie Bureau, Koningskade 23, 's-Gravenhage (aan dit adres zijn alle gewenschte inlichtingen te bekomen), en in het bijzonder op de Normaalbladen Nos. 333 en 334, betreffende maten en gewichten.

Brandstoffeneconomie.

Ten slotte deel ik U mede, dat het Rijks Instituut voor Brandstoffeneconomie, Bezuidenhout 97 te 's-Gravenhage zich belast met het geven van adviezen met betrekking tot het brandstofverbruik bij centrale verwarming.

De Minister van Onderwijs,
Kunsten en Wetenschappen,

Voor den Minister,

De Secretaris-Generaal,

C. FEITH.

„ONEINDIG" BIJ HET WISKUNDIG ONDERWIJS

DOOR

D. P. A. V.

In no. 2 van dezen jaargang komt een stukje van de heeren Haalmeijer en Schogt voor, waarin drie standpunten worden vermeld, die de docent bij het middelbaar (of gymnasiaal) onderwijs t. o. van het „oneindig" kan aannemen. Het derde standpunt is:

„Zonder aan oneindig de beteekenis van een getal te geven, kan men dit woord toch gebruiken, om eenvoudige spreekwijzen mogelijk te maken." Als toelichting dient b.v. „Alleen laat men uitdrukkingen als tg $90^\circ = \infty$ toe, hoewel een hoek van 90° geen tangens heeft en ∞ geen getal is. Het is niets anders dan een korte manier om te zeggen, dat, als een veranderlijke scherpe hoek onbepaald tot 90° nadert, de bijbehoorende tangenten stijgen boven elk getal."

Een eind verder luidt 't dan: „Het derde standpunt komt ons het meest aantrekkelijk voor."

Zeker, zoo gaat 't in 't algemeen ook mij en zoo zal 't den meesten docenten wel gaan.

Alleen zeg ik niet, dat een hoek van 90° geen tangens heeft; wel, dat deze door ons niet gedefinieerd wordt en dus zinloos blijft.

Het komt mij echter om verschillende redenen wenschelijk voor om dit standpunt aan te vullen en afzonderlijk vast te stellen, wanneer zekere waarden voor de onbekende(n) *wortels van een vergelijking* zijn, indien men voor moeilijkheden als de gesignaleerde komt te staan, dus *indien directe substitutie geen uitsluitsel geeft*, of anders gezegd, *indien volgens het consequent volhouden van bovengenoemd standpunt* (de heeren H. en S. zullen 't laatste beter gezegd vinden) van *wortels als 90° enz.* geen sprake zou kunnen zijn.

Daarbij komen dan (beperking tot vergelijkingen met één onbekende) m. i. één van twee standpunten in aanmerking:

A. $x = a$ voldoet aan

$$\varphi(x) = \psi(x),$$

indien

$$\lim_{x \to a} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0;$$

B. Als, voor 't geval, waarin x onbepaald tot a nadert, de volstrekte waarden van $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ boven elk getal stijgen, voldoet $x = a$ aan

$$\varphi(x) = \psi(x),$$

indien

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

Hierbij (A en B) de volgende opmerkingen. Vooreerst mag één der leden van de gegeven vergelijking bij toepassing van standpunt A een constante zijn.

Vervolgens is z.g. „vereenvoudigen" van breuken bij beide standpunten geoorloofd.

Standpunt A kan ook aldus worden uitgedrukt: Herleid — zooals men de leerlingen altijd heeft leeren herleiden — de vergelijking tot een zoo eenvoudig mogelijke gedaante

$$F(x) = 0,$$

dan zal $x = a$ aan de gegeven vergelijking voldoen, indien

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0.$$

Dat A en B elkaar niet dekken, blijkt uit een eenvoudig voorbeeld. Aan de vergelijking

$$\sec x = \operatorname{tg} x + 1$$

voldoet volgens A, $x = 90^\circ$ *niet* en volgens B *wel.*

Te oordeelen naar de leerboeken, nemen de meeste docenten — ook ik behoor daartoe — standpunt A in. Toch is 't mij bekend, dat ook standpunt B wordt ingenomen. Tegen B is zeker dit gewichtige bezwaar aan te voeren, dat daarbij geen termen onvoorwaardelijk van een lid van een vergelijking (met veranderd teeken) naar een ander lid overgebracht mogen worden.

Terwijl nu aan de vergelijking (Eindex. H. B. S. 1912):

$$\frac{\cos x (\sin x + \cos x)}{\cot (45^\circ - x)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2 \sin^2 (45^\circ - x),$$

volgens de heeren H. en S.

$$x = 90^\circ + k \times 180^\circ \text{ en } x = 45^\circ + k \times 180^\circ$$

niet voldoen en dus de vergelijking als valsch gekwalificeerd moet worden, voldoen ze volgens het door mij ingenomen standpunt wel, daar de gegeven vergelijking zich volgens dat standpunt laat herleiden tot

$$\cos x (\sin x - \cos x) = 0.$$

Het standpunt van de heeren H. en S., waarbij ze van het tot nu toe gebruikelijke afwijken, heeft m. i. o. a. dit tegen, dat men daarmee zeker minder kans heeft het volledig aantal antwoorden op een meetkundig (anal. meetk.) of mechanisch probleem te vinden dan met het mijne. D. P. A. V.

Wij kunnen het met den heer Verrijp niet eens zijn, dat er een afspraak noodig is om vast te stellen, wanneer zekere waarden voor de onbekende(n) wortels van eene vergelijking zijn, indien directe substitutie geen uitsluitsel geeft. Immers, een wortel van eene vergelijking is een getal, dat, gesubstitueerd voor de onbekende, de beide leden in gelijke getallen doet overgaan. (Wij beperken ons tot vergelijkingen met éene onbekende.) Nu kunnen wij ons niet voorstellen [1]) dat bij substitutie niet zou blijken, of de substitutieresultaten in de leden der vergelijking gelijke getallen, ongelijke getallen, of misschien in het geheel geen getallen zijn. Het is daarom o. i. niet mogelijk, aanvullende bepalingen te maken over de toelaatbaarheid van getallen als wortels eener vergelijking, zonder iets te zeggen, dat hetzij in de bovenstaande definitie van wortel eener vergelijking reeds opgesloten ligt, hetzij *daarmede in strijd is.* Dit laatste is het geval als men eene der door den heer Verrijp genoemde aanvullende worteldefinities A en B aanvaardt. De vraag: „Is 3 een wortel der vergelijking

$$\frac{x-3}{x-3} + 7 = x + 5?\text{"}$$

zou dan op grond van de algemeene worteldefinitie moeten worden beantwoord met „neen" en op grond van de aanvullende definitie A met „ja". Behalve wetenschappelijk is dit ook paedagogisch

[1]) Tenzij men in zijne beschouwingen vergelijkingen opneemt, in welker leden functies voorkomen, zooals in de intuitionistische wiskunde ter sprake komen.

onverdedigbaar; men kan toch niet verlangen, dat de leerlingen $\varphi = 90^\circ$ als wortel der vergelijking

$$\sec \varphi = \operatorname{tg} \varphi$$

zullen aanvaarden, nadat zij eerst hebben geleerd, dat een rechte hoek geen secans en geen tangens heeft.

Men kan deze quaestie nog eenigszins anders formuleeren. De heer Verrijp zegt: „aan de vergelijking $F(x) = 0$ voldoet $x = a$, als $\lim_{x \to a} F(x) = 0$ is"; de gevallen, waarin deze regel toegepast wordt, zijn die, waarin $F(a)$ niet gedefinieerd is. Het komt er dus op neer, dat wij de opgave krijgen, de nulpunten van eene zekere functie $F(x)$ te bepalen, en dat wij nu, als de functie $F(x)$ ons niet bevalt, in plaats van de nulpunten van $F(x)$ die van eene *andere* functie gaan bepalen. Al is dit gebruikelijk (hierin zal de heer Verrijp wel gelijk hebben), daarom is het nog niet geoorloofd, laat staan verplicht.

Het is niet de eerste maal, dat dit onderwerp in „Euclides" ter sprake komt. In den vierden jaargang heeft Ir. O. H. Stuiver[1]) deze quaestie behandeld op eene wijze, die onze volledige instemming hebben kan. De heer Stuiver heeft, door te spreken van „oneigenlijke wortels", te kennen gegeven, dat men te maken heeft met getallen, die niet onder de worteldefinitie vallen en dus geen wortels zijn.

Wat nu betreft het verband tusschen eene vergelijking en het vraagstuk, waaruit die is voortgekomen, is het vaak zeer moeilijk of zelfs onmogelijk om te zorgen, dat de verzameling van de wortels der vergelijking identiek is met de verzameling der antwoorden van het vraagstuk. Het zal dus (behalve misschien in zeer eenvoudige gevallen) wel steeds noodig zijn om na te gaan, of de wortels der vergelijking antwoorden van het vraagstuk leveren. Maar als een vraagstuk leidt tot eene vergelijking $F(x) = 0$ terwijl de functie $F(x)$ voor eene waarde x_0 van x niet gedefinieerd is, zoodat x_0 geen wortel der vergelijking $F(x) = 0$ is, dan zal men steeds moeten onderzoeken, of met deze waarde x_0 wellicht eene oplossing van het vraagstuk correspondeert.

De bovenstaande gedachtenwisseling biedt ons eene welkome

---

1) Over den vorm 0/0 in de algebra. Euclides IV, blz. 274.

gelegenheid ons stukje aan te vullen. Bij lezing van een artikel van den heer Feigl: Das Unendliche in der Schulmathematik[1]), schoot ons te binnen, dat wij vergeten hadden iets te zeggen over het *actueel* oneindige bij het schoolonderwijs. Dit toch speelt eene rol b.v. als wij spreken van een oneindige reeks, als we zeggen dat eene rechte lijn oneindig lang is, dat een lijnstuk oneindig veel punten bevat, dat er oneindig veel natuurlijke getallen zijn.

Daar wel niemand zal trachten op school iets te behandelen van de machtigheidstheorie der oneindige verzamelingen, bestaat hier geen gevaar, dat door het invoeren van oneindige getallen te hooge eischen aan de leerlingen worden gesteld, en deze zaken zullen dan ook wel nooit bepaald fouten veroorzaken. Er valt hier eigenlijk alleen nog te praten over het woordgebruik. Wanneer maar goed vast staat, dat wij aan „oneindig" geen getal verbinden, is er o. i. geen bezwaar tegen het gebruik van dit woord. Onder eene oneindige reeks b.v. verstaan wij werkelijk eene reeks zonder einde, m. a. w. die altijd doorloopt, of nog anders gezegd, die meer termen bevat dan elk natuurlijk getal eenheden. Als wij zeggen, dat eene rechte lijn zich in beide richtingen oneindig ver uitstrekt, bedoelen wij daarmede, dat zij in geen van beide richtingen een eindpunt heeft, of anders gezegd, dat zij aan beide zijden uitsteekt buiten elk lijnstuk, dat er twee punten mee gemeen heeft. Enz.

B. P. H.
J. H. S.

Naschrift. Es ist eine alte Geschichte, doch bleibt sie immer neu. Achilles en de schildpad enz.

De kwestie heeft drie kanten, een wetenschappelijke, een paedagogische en een toepasselijke.

Het komt mij voor, dat de bezwaren van de heeren H. en S. tegen het standpunt door mij voorgestaan, meest van wetenschappelijken aard zijn. En ofschoon ik mij wel in hun gedachtengang kan indenken, ga ik toch niet met hen mee. Vooreerst niet hierom: Wat is eigenlijk een oneindig getal in den zin van bovengenoemd standpunt III? Niets anders dan een *„veranderend" eindig*, volgens Cantor (Math. Ann. 21, 1883, p. 546) een

[1]) Zeitschrift für Math. und Nat. Unterricht, 1929, n⁰. 9.

„oneigenlijk" *oneindig*, of, zooals 't gemeenlijk genoemd wordt, *potentieel oneindig* (G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen I, 1890, blz. 8 seq.; Zeitschrift f. Philos. Bd. 88, 1886; Bd. 91, 1887). En nu mag men zeggen, dat werkelijk oneindige getallen in de analyse niet bestaan, toch laat zich na Bolzano, Cantor en Dedekind — onafhankelijk van elk *groeiproces* — het oneindige zich als een *actueel* of *eigenlijk* oneindig streng arithmetisch definieeren. Nu kan men in den zin van een *veranderend* getal toch zeker niet verwachten, dat men met een wortel van een vergelijking te doen *kàn* hebben, daar men toch ook bij substitutie in 't algemeen veranderende getallen verkrijgt. Het komt mij voor, dat *hier* een *transfiniet* „getal" meer recht heeft op den naam van getal dan een *„veranderend"* eindig getal. Waarom dan niet bij deze kwestie een nieuwe definitie voor een wortel ingevoerd, een definitie, die bovendien hierbij volkomen past, ook van uit een paedagogisch standpunt? Want de leerlingen kunnen toch ook moeilijk bezwaar hebben tegen een wortel van $f(x) = 0$, die, wanneer men een veranderlijk getal x er onbepaald toe laat naderen, $f(x)$ minder van 0 doet verschillen dan welk positief getal ook, terwijl men toch over de transfiniete getallen, die bij substitutie van zoo'n wortel in de gegeven vergelijking ontstaan, als men wil, in 't geheel niet behoeft te spreken. Wil iemand zoo'n wortel een „oneigenlijke" *noemen*, 't is mij wel!

Dat men voor de „functie" $\frac{x-3}{x-3}$ (zie boven) *ook* (zonder, hoewel toch in overeenstemming met limietbeschouwing) voor $x = 3$ het getal 1 schrijft, heeft wetenschappelijk geen bezwaar. Want men kan dit bij wijze van definitie doen en daarbij denken aan „die Permanenz der formalen Gesetze". En hiermede staat ook nog in verband een paedagogisch groot voordeel van het standpunt door mij verdedigd, nl. dat de herleide vergelijking volkomen gelijkwaardig wordt geacht met de oorspronkelijke, wat bij 't standpunt der heeren H. en S. niet 't geval is.

Tot slot nog iets over de toepasselijke zijde van de kwestie. Onlangs kwam in mijn VI B klasse bij de analytische meetkunde het volgend vraagstukje voor: Gegeven de cirkels $x^2 + y^2 = 1$ en $(x-4)^2 + y^2 = 9$. Gevraagd de vergelijkingen der gemeenschappelijke raaklijnen te bepalen.

Neemt men de richtingscoëfficient (m) van een raaklijn als onbe-

kende aan, dan komt men tot 4 vergelijkingen, waarvan er twee

$$\sqrt{m^2+1}=m \quad \text{en} \quad \sqrt{m^2+1}=-m$$

zijn. De twee andere leveren de gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen.

Nu zullen de heeren H. en S. zeggen: die vergelijkingen zijn valsch, maar dan krijgen ze bij deze oplossing de gemeenschappelijke inwendige raaklijn in het raakpunt der beide cirkels *niet*. En nu hoor ik al iemand zeggen: draai dan maar 't coördinatenstelsel of verwissel X- en Y-as. Ja, maar dat is 't nu juist, wat ik *niet* wensch te doen! In 't algemeen mag men bij eén algebraïsche oplossing den eisch stellen, dat men zoo weinig mogelijk voor moeilijkheden uit den weg gaat, of (zie onderstaand antwoord) aanvullende onderzoekingen doet.

Natuurlijk is mijn oplossing van de vergelijking $\sqrt{m^2+1}=m$ aldus:

$$\frac{(m^2+1)-m^2}{\sqrt{m^2+1}+m}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}=0$$

waaraan $m=\infty$ (men kan, als men 't liever wil, schrijven: $m\rightarrow\infty$, als $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}\rightarrow 0$) voldoet. Men kan blijkbaar ook de vergelijking $\sec\varphi=\operatorname{tg}\varphi$ oplossen en vindt dan 't zelfde. En ten slotte bedenke men toch ook, dat de raaklijn eveneens een *limietstand* inneemt.

V.

Op het punt van de opvattingen omtrent „oneindig" en op dat van de toelaatbaarheid van definities bestaat blijkbaar tusschen den heer Verrijp en ons een te groot verschil, dan dat wij voortzetting der discussie vruchtbaar achten.

Onder verwijzing naar het op bladzijde 155 afgedrukte willen wij echter nog even stipuleeren, dat wij in het door den heer Verrijp genoemde meetkundige voorbeeld niet het coordinatenstelsel zouden willen wijzigen, maar — als eenmaal de richtingscoefficienten der gezochte lijnen als onbekenden zijn aangenomen, — onderzoeken, of de lijnen, die geen richtingscoefficienten hebben, aan het meetkundige vraagstuk voldoen.

B. P. H

J. H. S.

BOEKBESPREKINGEN.

Nieuwe School-Algebra, Deel IV door P. Wijdenes en Dr. H. J. E. Beth. P. Noordhoff, 1930. Groningen.

Met het schrijven van het vierde deeltje van Wijdenes „Nieuwe School-Algebra" heeft de heer Beth het wiskunde-onderwijs een groote dienst bewezen. Niet dat ik mij voorstel, dat de stof, die in dit boekje behandeld wordt, nu al dadelijk in het onderwijs zal worden ingevoerd, maar wel geloof ik in een indirecte beïnvloeding. Vele docenten zullen uit dit boekje kunnen zien, wat bij zeer voorzichtig probeeren maar volhardend werken te bereiken is met onze leerlingen. Veel is er, dat in het kader van het tegenwoordige programma behandeld *kan* worden, in het bijzonder de kern van het boekje: het getalbegrip.

Een van de belangrijkste vernieuwingen van het wiskundeonderwijs is wel hierin gelegen, dat op den achtergrond is getreden de vraag, òf men een vraagstuk kan oplossen (al blijft ze uit de aard der zaak primair), terwijl de vraag hoe, op welke manier wordt het vraagstuk opgelost aan beteekenis heeft gewonnen. De meening „Maak maar veel vraagstukken en je leert wiskunde" is verouderd; het oplossen van vraagstukken blijft noodzakelijk, maar is onvoldoende, om de leerling inzicht te geven in de wiskunde en om zijn bewust denken te ontwikkelen. Hiervoor is het noodzakelijk de leerlingen inzicht te geven in de gebruikte begrippen en oplossingsmethoden.

In dit opzicht waardeer ik het werk van den heer Beth het meest. Aansluitend bij de Beknopte Rekenkunde van Wijdenes, dus vanaf het eerste leerjaar begint zijn uiteenzetting van het getalbegrip, om dit bij elke uitbreiding te verdiepen en te bevestigen. Want wil een behandeling van echte waardevolle wiskunde kans van slagen hebben, dan is een grondige voorbereiding een onafwijsbare eisch. Ik stel me dan ook voor, dat de meeste docenten, die dit boekje aan enkele hunner leerlingen zullen aanbevelen, in de voorgaande jaren herhaaldelijk getracht zullen hebben hen eenig inzicht in het getalbegrip bij te brengen, zij het dan ook veel onvollediger dan de schrijver het in zijn werkje doet. Voor dergelijke leerlingen zal dit boekje een waar geschenk zijn.

Schrijver begint zijn werkje met een hoofdstuk over „Grenswaarden." Uitvoerig worden de varianten en hun eigenschappen, wat betreft som, verschil, product en quotient besproken. Jammer, dat in plaats van de notatie $\lim_{n=\infty} g_n$ (blz. 1) niet de duidelijker schrijfwijze $\lim_{n\to\infty} g_n$ wordt gebruikt, temeer waar schrijver terecht er op wijst, dat het gebruikte teeken $=$ *niet* een gelijkheid aanduidt.

Uitgaande van de variant $g_n = \frac{1}{n} + 2$ komt men tot de limiet van de functie $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ voor $x \rightarrow \infty$. Dit geval onderscheidt zich van de variant uitsluitend daarin, dat n (nu x genoemd) niet alleen de rij der natuurlijke getallen doorloopt, maar elke reeks stijgende waarden doorloopen kan. Voortgaande wordt scherp onderscheid gemaakt tusschen de grenswaarde(n) van een functie voor $x \rightarrow x_1$ en de functiewaarde van $f(x)$ voor $x = x_1$ (continu en discontinu). In deze heldere uiteenzetting vindt men de oplossing van moeilijkheden, die zich vroeger in het onderwijs hebben kunnen voordoen. Ten slotte wordt erop gewezen, dat de stellingen voor het rekenen met limieten van varianten toepasbaar zijn voor het rekenen met limieten van functies, waarvan eenige voorbeelden gegeven worden.

In het 2e hoofdstuk wordt het differentiaalquotient, als limiet van het differentiequotient gedefinieerd, terwijl in het volgende hoofdstuk de meest eenvoudige regels voor de berekening van afgeleide functies worden bewezen (de regel voor het differentieeren van een samengestelde functie wordt niet gegeven). Eenigszins geheimzinnig is het bewijs der stelling, dat de afgeleide van een constante nul is, via de regel voor de differentiatie van een product. Vervolgens wordt ook de meetkundige beteekenis van het tweede differentiaalquotient uiteengezet in de fraaie regel: „Als de tweede afgeleide positief (negatief) is, dan keert de kromme haar bolle (holle) zijde naar beneden" ter vervanging van de veelal gebruikelijke: „Is $y_1 f''(x_1) > 0$, dan is de de kromme in $P(x_1, y_1)$ van de X-as gezien, bol, in het tegengestelde geval hol. De formuleering van Beth is onmiddellijk uit de figuur af te lezen.

Toepassing vinden beide afgeleiden bij het bepalen van extrema, waarbij ook de grensextrema vermeld worden. Het geval $y' = 0$ en $y'' = 0$ wordt even aangestipt, maar niet verder besproken om begrijpelijke redenen, al lijkt me kleine zinnetjes als op blz. 47 „er is *dus* geen extremum" (cursiveering van mij) gevaarlijk.

Op blz. 52 begint S. met het op het oogenblik voor ons onderwijs belangrijkste deel: de behandeling van het irrationale getal.

Hier vindt men uitvoerig uiteengezet, hoe de heer Beth zich „de ontwikkeling van het getalbegrip bij het middelbaar en voorbereidend hooger Onderwijs" voorstelt (zie Voordracht, gehouden in de derde bijeenkomst van Wiskunde-leeraren te Utrecht, 24 Mrt. 1928. Euclides V 1928/29 No. 6 p. 270—284). Zooals reeds hierboven is gezegd, berust de mogelijkheid van dergelijk ontwikkelend wiskunde-onderwijs op een zeer geleidelijke uiteenzetting, reeds beginnend in de lagere klassen. Het heeft mij dan ook zeer verwonderd, dat S. op blz. 58 zegt „We hebben nl. in de vlakke meetkunde tot driemaal toe bij het bewijs van stellingen van de, thans onjuist gebleken, onderstelling gebruik gemaakt, dat iedere twee gelijksoortige grootheden zich als *twee natuurlijke getallen* verhouden. De eerste stelling sprak van de verhouding der stukken, die drie evenwijdige lijnen op twee willekeurige rechten bepalen; de tweede over de verhouding van de oppervlakten van twee rechthoeken, die dezelfde basis hebben; de derde over de verhouding van de middelpuntshoeken in een cirkel, en

de bogen, die zij op den omtrek bepalen" (cursiveering van mij). Een behandeling, waarbij deze onderstelling niet gemaakt wordt, zou toch meer in de gedachtengang van S. gepast hebben en in overeenstemming zijn met de meest gebruikte boeken.

Uitvoerig bespreekt S. de definitie van het irrationale getal met behulp van de snede van Dedekind, met een kleine aanduiding van de definitie van het irrationale getal als limiet van een convergente variant. Belangrijk is hier de bespreking van de mogelijkheid van de definities voor gelijkheid en ongelijkheid van twee onmeetbare getallen. Er wordt op gewezen, dat deze betrekkingen voldoen aan de grondeigenschappen: de gelijkheid is commutatief en transitief, de ongelijkheid is niet-commutatief, maar wel transitief. Ook worden de oude rationale getallen in het nieuwe systeem ingelijfd. Aan de definities van de bewerkingen met irrationale getallen wordt de volle aandacht gewijd.

Het nu volgend hoofdstuk „De Integraal" is wel zeer sober gehouden, al komt de beteekenis van een integraal ten volle tot haar recht. Hier heeft S. zich een beperking opgelegd, waar ik niet mee kan instemmen. Op blz. 84 zegt S. „Voor het zoeken van de onbepaalde integraal behoeven geen regels gegeven te worden, daar men slechts heeft te zien of de gegeven functie de afgeleide is van één der functies, waarvan we vroeger het differentiaalquotient bepaald hebben." Waarom hier, evenals in het voorbericht, niet royaal gezegd „ik wil die noodzakelijke regels tot een minimum beperken, te meer daar de allereenvoudigste regels op blz. 84 en 85 toch genoemd worden en op blz. 96 zelfs de eenvoudigste substitutie gebruikt wordt. In plaats van „oneigenlijke integralen" zou ik enkele eenvoudige voorbeelden van substitutie en partiëele integratie verkozen hebben.

Vervolgens gaat S. verder met de ontwikkeling van het getalbegrip door een uitvoerige behandeling van de complexe getallen. Aardig is, hoe S. met voorbeelden illustreert hoe de toepasbaarheid van breuken beperkt is, zoodat we ons op dergelijke gronden niet mogen verwonderen over de invoering van irrationale en imaginaire getallen. Ook deze vinden op bepaalde gebieden ruime toepassing en zijn onmisbaar.

De definitie van gelijkheid wordt gegeven; de onmogelijkheid van een definitie van ongelijkheid wordt besproken (blz. 127). Vooral het aantoonen van de onmogelijkheid om een bepaalde eigenschap ook in het nieuwe getallengebied op te nemen, lijkt mij zeer instructief.

De bespreking van de bewerkingen met complexe getallen, die tot dusver als getallenparen geschreven werden (a, b) leidt tot de meer eenvoudige notatie $a + bi$, waarbij we i slechts als algebraïsche grootheid hebben te behandelen met de eigenschap $i^2 = -1$.

Uitvoerig bespreekt S. nu de vierkantsworteltrekking in het gebied der complexe getallen, met als toepassing de oplossing der algemeene vierkantsvergelijking. Als toepassing worden de meest eenvoudige binomiaalvergelijkingen opgelost. Eerst na de volledige behandeling van de meetkundige voorstelling der complexe getallen volgt de oplossing van de algemeene binomiaalvergelijking (Stelling van Demoivre).

Het boekje eindigt met iets over transformatie van figuren.

Tal van vraagstukken zijn aan elk hoofdstuk toegevoegd om de

besproken stof te verwerken en vast te leggen, terwijl nog een twintig nieuwe stellen examenwerk voor een toekomstig eindexamen zijn toegevoegd. v. d. Vooren.

Dr. A. D. Fokker, *Relativiteitstheorie*. 298 blz. P. Noordhoff, Groningen 1929.

De jaren, waarin elke week een verhandeling en elke maand een boek over de relativiteitstheorie bracht, zijn voorbij. Deze theorie ligt thans voor ons als een goed-sluitend geheel; afgezien van belangwekkende pogingen, die echter tot dusver door gebrek aan physischen inhoud niet als geslaagd beschouwd kunnen worden, de leer van het electromagnetisme en van de zwaarte tot één verschijnsel te herleiden, is haar ontwikkeling voorloopig tot stilstand gekomen. In een nu verschijnende uiteenzetting dezer theorie mag van den Schrijver verwacht worden, dat hij den lezer doordringt van de noodzakelijkheid harer opstelling, en verder, na de noodige wiskundige hulpmiddelen te hebben aangewezen, aantoont, op welke gebieden der natuurkunde in de eerste plaats haar beteekenis ligt en hoe zij de proefnemingen, tot haar toetsing verricht, heeft doorstaan. Dit is de taak, die de heer Fokker zich stelt.

Voorop gaat een duidelijke uiteenzetting van de theorie van Maxwell, gebaseerd op de naar hem genoemde veldvergelijkingen en de door Lorentz gegeven aanvulling, die de werking van het veld op de geladen materie aangeeft. De Schrijver toont dan aan, hoe Lorentz door een bepaalde transformatie het vraagstuk der voortplanting van elektromagnetische golven in een zich bewegende middenstof herleidde tot hetzelfde probleem in een stilstaand medium, en hoe deze *Lorentz*-transformatie door Minkowski gebracht werd in een merkwaardigen vorm, waarin de ruimtecoördinaten en de tijd op symmetrische wijze voorkomen. Dan komt hij tot Einstein's schepping, de grootsche theorie, die deze transformatie physisch vertolkt.

Achtereenvolgens worden de „speciale" en de „algemeene" relativiteitstheorie behandeld; beide keeren gaat de daarvoor noodige wiskunde — tensoranalyse — vooraf. De physische waarde wordt getoetst aan de bekende experimenten: beweging van het perihelium, kromming der lichtstralen en verschuiving van spectraallijnen; hoofdstuk XI behandelt nog verschillende andere proeven ter verificatie: die, door Rayleigh en Brace gedaan, om door lichtbreking den „aetherwind" op te sporen, de condensatorproef van Trouton en Nobile (met hetzelfde doel) en proeven over de traagheid der electronen.

De laatste beide hoofdstukken behandelen: de veldvergelijkingen als uitkomst van variatiestellingen, beschouwingen over een gesloten heelal (de „werelden van Einstein en de Sitter").

Hiermee is de inhoud van het boek van den heer Fokker zeer verkort weergegeven; er zijn behalve de genoemde hoofdstukken, die de kern van elke uiteenzetting van de relativiteitstheorie moeten vormen, nog andere, die misschien gemist kunnen worden maar wier

opname toch zeer te waardeeren valt (b.v. een vrij uitvoerige relativiteitscinematica en -dynamica met een bespreking van de opvattingen betreffende het vaste lichaam).

Hoe is nu de Schrijver geslaagd in de dubbele taak: de relativiteitstheorie als noodzakelijke physische hypothese logisch en duidelijk uiteen te zetten en uit hare grondgedachten de consequenties langs mathematischen weg onweerlegbaar af te leiden? O.i. in de behandeling der eerste opgaaf zeer goed, terwijl op die der tweede gerechtvaardigde aanmerkingen gemaakt kunnen worden.

Verschillende gedeelten, b.v. het eerste viertal hoofdstukken, zijn overtuigend en levendig geschreven met de sterk uitkomende neiging deze physische theorie physisch te „illustreeren". Herhaaldelijk wordt een reeds verkregen conclusie, dikwijls analytisch dadelijk in te zien, nogmaals langs een langeren maar meer aanschouwelijken weg afgeleid, waarbij de lezer veelal gedwongen wordt zich de ervaringen van verschillende waarnemers voor te stellen. Aan den tekst zijn op vele plaatsen opgaven voor den gebruiker ter oefening verbonden; het zou nog doelmatiger geweest zijn hier steeds het verlangde resultaat te vermelden (de „taak" op blz. 79 kan licht verkeerd opgevat worden; bedoeld is: ga algebraïsch de juistheid der voorafgaande bewering na).

De motiveering van ons oordeel over de wiskundige uitwerking zal eenige meerdere ruimte eischen. Laten wij beginnen met de eenige ons opgevallen plaats, waar een *resultaat* onjuist werd aangegeven (de andere punten betreffen afleiding en vorm).

De bewering, dat in de vierdimensionale ruimte — hier kan alleen de „gewone" Euclidische ruimte bedoeld zijn — *elke* dubbeldraaiing op één en slechts één wijze in twee draaiingen om onderling volkomen loodrechte vlakken ontbonden kan worden, is onjuist; wanneer beide componenten gelijk zijn, gelukt deze ontbinding op oneindig veel wijzen. Opgemerkt mag worden, dat de uitgesproken bewering (steeds worden alleen reëele draaiingen bedoeld) juist is in de Lorentz-ruimte, waartoe de Schrijver zich had kunnen beperken.

In de tensor-analyse zijn sommige uitspraken en sommige bewijzen niet correct; hier volgen een paar voorbeelden.

Een matrix van drie rijen en vier kolommen, opgebouwd uit de contravariante kentallen van drie vectoren, bepalen een trivector, (p. 73); deze moet zorgvuldig onderscheiden worden van den vector, wiens covariante kentallen met de zijne evenredig zijn (wat hier niet of niet voldoende geschiedt); het kenmerk voor deze grootheden zijn de transformatieformules, die voor beide verschillend zijn. De factor $\frac{1}{\sqrt{g}}$, die op p. 76 aan de contravariante kentallen van een bivector wordt toegevoegd dient daar ook niet alleen of zelfs hoofdzakelijk voor de symmetrie, maar om deze contravariante kentallen in de covariante componenten van een anderen bivector om te zetten.

Bij bewijzen als op p. 113—116 is het doel een in speciale coördinaten uitgesproken wet algemeen te formuleeren; de tensortheorie doet dadelijk zien, dat de gegeven uitkomsten invariant zijn en voor de aanvankelijk gebruikte coördinaten in de gegeven formuleeringen

overgaan. M.a.w. het resultaat is juist en gemakkelijk te bewijzen; de hier gegeven bewijzen zijn onbevredigend.

Op sommige punten is o.i. de vorm verwaarloosd, wat niet alleen aan den aesthetischen inhoud maar ook aan de duidelijkheid afbreuk doet. Herhaaldelijk wordt van „beweging", „gelijktijdigheid" gesproken, zonder dat vermeld wordt met betrekking tot welk beschrijvingsraam. Vreemd doet het aan, dat de Schrijver na een kortgestelde scherpe definitie, een modeldefinitie derhalve, van „natuurlijk gemeten tijdpoos" gegeven te hebben, deze, mutatis mutandis, niet herhaalt voor „natuurlijk gemeten eind".

Nog één punt, niet bijzonder belangrijk maar wel eigenaardig; waarom polemiseert de Schrijver tegen de uitdrukking: „additie van snelheden"? Omdat snelheden t.o.v. verschillende beschrijvingsramen volgens zijn oordeel ongelijksoortige grootheden zijn. Maar wanneer zijn grootheden „gelijksoortig"? Daarvoor mag voorloopig elk een definitie naar zijn eigen smaak geven; maar waarom zou een bepaalde op twee vectoren toegepaste bewerking, die een volkomen bepaalde invariante uitkomst geeft en in hare eigenschappen aan de optelling herinnert, niet de „optelling" van die beide vectoren mogen heeten? Op p. 104 behandelt immers ook de Schrijver de „vermenigvuldiging" van tensoren!

Derhalve een boek met overtuiging en levendigheid geschreven, geschikt om nieuwe belangstelling te wekken of oude te doen herleven. Nu echter de tegenwoordige physische jeugd zich met wilde geestdrift op de quanta en de golfmechanica werpt, zal het gelezen worden vooral door meer mathematisch georiënteerden, wier denkrichting soms van die van den Schrijver verschilt en die daardoor gevaar loopen een wat eenzijdige kritiek te leveren. v. d. W o u d e.

DE WISKUNDE IN HET BELGISCH MIDDELBAAR ONDERWIJS

DOOR

Dr. PAUL DE VAERE (Brussel).

Sedert het verschijnen van de gelijkbetitelde bijdrage in nr. 4 van den 5den jaargang van *Euclides* zijn twee, in dit artikel als in voorbereiding voorgestelde hervormingen, verwezenlijkt:

1. Een nieuw algemeen leerplan voor het Middelbaar Onderwijs verscheen in den zomer 1929 en wordt sedert het hervatten der lessen in September 1929 toegepast.

2. Het wetsvoorstel nopens het toekennen der academische graden en het programma der universitaire examens, sedert 1924 bij de Wetgevende Macht aanhangig gemaakt, werd in het parlementaire zittingsjaar 1928/29 goedgekeurd, en de definitieve wettekst verscheen in het *Staatsblad* van 25 Mei 1929.

Wij stellen ons voor, op heel beknopte wijze, de draagwijdte van deze beide hervormingen uiteen te zetten, in zooverre zij van beteekenis voor het onderwijs in de wiskunde en de voorbereiding van de docenten zijn.

1. HET NIEUWE LEERPLAN VOOR HET M.O.

Aan de inrichting zelf van het onderwijs wordt niets veranderd, evenmin als aan het aantal lesuren, waarover elk vak beschikt; nochtans krijgt de Natuurkunde, die van de 5de klasse af op het leerplan voorkomt, het echter met één wekelijsch lesuur moest stellen, er nu in de drie hoogste klassen één uur bij, verplicht voor de Latijnsche en de Wetenschappelijke afdeelingen, facultatief voor de andere.

Bij de bewerking van het leerplan in de Wiskunde stond de bedoeling op den voorgrond geen ingrijpende hervormingen door te voeren. De lichte wijzigingen in de leerstof en in hare verdeeling over de verschillende klassen zijn, voor een buitenstaander, van elk

wezenlijk belang ontbloot. We wijzen dan ook slechts op enkele punten, die ons van meer belang lijken.

In alle afdeelingen wordt, als voorbereiding tot de systematische, beredeneerde cursus in de Meetkunde, een beknopte, intuïtieve inleiding gegeven.

In de Grieksch-Latijnsche afdeeling wordt de leergang in de theorie der Rekenkunde (Getallenleer) en die in de Gonio- en Trigonometrie eenigszins versterkt.

In de 2de Wetenschappelijke en Latijnsche vervallen: determinanten met meer dan 9 elementen en begrippen over convergeerende reeksen; e wordt gedefinieerd als $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Weer opgenomen worden de volgende onderwerpen die, hetzij in 1924, hetzij in 1926 geschrapt werden: permutaties, variaties, combinaties; onbepaalde vergelijking $ax + by = c$; onderzoek, naar het verloop van enkele functies, zonder behulp van de afgeleide; uiterste waarden van $\Pi x_i^{a_i}$ als Σx_i constant is, en van Σx_i als Πx_i constant is (positieve veranderlijken). Nieuw zijn: het begrip inverse functies; gebruik van de rekenliniaal.

De Analytische Meetkunde waarmee, sedert 1924, reeds in de 2de Wetenschappelijke en Latijnsche begonnen werd, wordt, zooals voorheen, in haar geheel verschoven naar de 1ste klas, en aangevuld met de facultatieve onderwerpen: trilineaire coördinaten en lijncoördinaten.

De Beschrijvende Meetkunde wordt aangevuld met het facultatieve onderwerp: genummerde projecties.

Uit de onderrichtingen, die het nieuwe leerplan begeleiden, lichten wij het volgende:

De studie van de Algebra zal niet aanvangen met de invoering der relatieve getallen en de bewerkingen op algebraïsche vormen, wel echter — zooals vóór 1924 het geval was — met het algebraïsch oplossen van eenvoudige vraagstukken, die tot eerste graadvergelijkingen met één onbekende voeren.

Bij het oplossen van vergelijkingen zal van meet af veel nadruk gelegd worden op het begrip gelijkwaardige vergelijkingen en stelsels; ook de ongelijkheden dienen met zorg behandeld te worden; het bespreken van een vraagstuk staat immers gelijk met het be-

spreken van een stelsel bestaande uit vergelijkingen en ongelijkheden.

Door het behandelen der spiegeling, evenwijdige verschuiving, draaiïng, vermenigvuldiging van figuren en inversie zullen de leerlingen der Wetenschappelijke en Latijnsche afdeelingen eenig inzicht verkrijgen in het wezen van meetkundige transformaties.

In de Analytische Meetkunde dienen zoo vroeg mogelijk de homogene coördinaten, de elementen op oneindig en de imaginaire elementen ingevoerd te worden om tot algemeen geldige resultaten te komen.

2. DE NIEUWE WET OP HET TOEKENNEN DER ACADEMISCHE GRADEN EN DE VOORBEREIDING DER ATHENEUM-LEERAARS.

We brengen in herinnering dat, volgens de oude wetgeving, na twee jaar universitaire studie het diploma van *candidaat in de Wis- en Natuurkunde* kon behaald worden; na verdere twee jaar, dit van *doctor in de Wis- en Natuurkunde;* dit laatste diploma verleende bevoegdheid voor het onderwijs in de Wiskunde aan Athenea.

Het doel van de nieuwe wet is tweeledig: verscherping van de eischen gesteld voor het behalen van den doctorstitel, o.a. door den studietijd van vier op minstens vijf jaar te brengen; betere paedagogische voorbereiding van de Atheneumleeraars door het instellen van den graad van *geaggregeerde van het middelbaar onderwijs van den hoogeren graad (voor de letteren en wijsbegeerte of voor de wetenschappen).*

De resp. na twee- en vierjarige studie verleende graden zullen voortaan heeten: *candidaat in de Wetenschappen, licenciaat in de Wetenschappen.* Niettegenstaande deze algemeene benaming is wel degelijk, en zelfs van meet af, een specialiseering voorzien: Wiskunde, Natuurkunde, Scheikunde, Geo- en Mineralogie, Dierkunde, Plantkunde, Aardrijkskunde.

Wie de kant der Wiskunde uitgaat wordt ondervraagd over de volgende vakken:

A. *Candidaatsexamen.*

Overzicht der wijsbegeerte (logica, zielkunde, zedeleer); hoogere algebra; analytische meetkunde; differentiaal- en integraalrekening (met inbegrip der differentie- en der variatierekening); analytische mechanica; beginselen der sterrekunde en der geodesie; algemeene

natuurkunde en beginselen der theoretische en der wiskundige natuurkunde; algemeene scheikunde; projectieve meetkunde; beschrijvende meetkunde.

B. *Licenciaatsexamen.*

Hoogere analyse; infinitesimaalmeetkunde; complement der analytische mechanica; waarschijnlijkheidsrekening en theorie der waarnemingsfouten; wiskundige natuurkunde; spherische en wiskundige sterrekunde; wiskundige methodeleer. [1])

Bovendien legt de examinandus een grondige proef af over een der volgende specialiteiten, naar keus: hoogere analyse, hoogere meetkunde, sterrekunde en geodesie, wiskundige natuurkunde, analytische mechanica en hemelmechanica; en moet hij een verhandeling indienen over een onderwerp dat tot zijne specialiteit behoort.

Na verloop van minstens één jaar na het licenciaatsexamen, kan men nu promoveeren tot *doctor in de Wetenschappen* door het indienen en verdedigen van een oorspronkelijk proefschrift en van een stelling.

De doctorstitel op zichzelf verleent echter geen bevoegdheid tot les geven in de Koninklijke Athenea, en is daartoe ook geen vereischte. Wie deze bevoegdheid wenscht te verwerven, moet het examen van *geaggregeerde van het middelbaar onderwijs van den hoogeren graad (voor wetenschappen)* afleggen; dit mag dadelijk na het licenciaatsexamen gebeuren, doch die proef is slechts toegankelijk voor wie door een getuigschrift kan bewijzen dat hij, gedurende ten minste één jaar, onder leiding van zijn professor in de methodeleer, didactische oefeningen bijgewoond heeft in een inrichting van het Middelbaar Onderwijs; het examen zelf loopt over de opvoedkunde en hare geschiedenis, de algemeene methodeleer en de bizondere methodeleer der vakken die de examinandus wenscht te doceeren; deze dient bovendien twee openbare lessen te geven over onderwerpen uit het Middelbaar Onderwijs.

Terloops zij nog vermeld dat de nieuwe wet ook de graad van *geaggregeerde van het hooger onderwijs instelt;* deze kan op zijn

[1]) Om onbegrijpelijke redenen — of is het slechts vergeten? — verviel de geschiedenis der wiskunde als college- en examenstof. Mocht dit verzuim nog tijdig hersteld worden!

vroegst twee jaar na de promotie tot doctor verworven worden; het examen behelst het indienen en het verdedigen van een gedrukt proefschrift, oorspronkelijke en belangrijke bijdrage tot de Wetenschap, en van drie bijkomende stellingen of kleinere verhandelingen; verder een les over een onderwerp ontleend aan het Universitair Onderwijs.

De nieuwe wet zal met ingang van het academisch jaar 1930/31 trapsgewijze toegepast worden. Nog ettelijke jaren zullen dus verloopen eer we de volgens de nieuwe regeling gevormde leeraars aan 't werk zullen zien. Het zal alleszins belangwekkend zijn om na te gaan hoe de hierboven geschetste hervorming de toets der praktijk doorstaat.

PAUL TANNERY OVER EUCLIDES' SECTIO CANONIS,

(Inauthenticité de la Division du Canon, attribuée à Euclide, Mémoires Scientifiques, III. (1904), p. 213—219. Herdrukt naar: Extrait des Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres, 1904, t. IV. pp. 439—445).

BESPROKEN DOOR

CH. M. VAN DEVENTER. [1]

In mijn opstel, *een Foutieve Natuurwet* (Euclides, 1929, p. 187, 189) nam ik van Paul Tannery over, dat het slot der gemeenlijk aan Euclides toegeschreven *Sectio Canonis* niet van den grooten wiskunstenaar afkomstig zou kunnen zijn, doch een toevoegsel is van later tijd. Over het geschrift in zijn geheel sprak ik niet, maar wel nam ik ook Tannery's twijfel aan de *Inleiding* der *Sectio* over, al twijfelde ik op een wat andere wijze dan hij het deed: ik meende door Tannery's gezag genoegzaam gedekt te zijn.

Toen ik later echter Tannery's geschrift met de gegevens der *Sectio* zelven vergeleek, ging ik anders denken. Want wel deed de fransche geleerde een gewichtige vondst, die tot ernstig beraad stemt, maar het komt mij thans voor, dat zij niet *dwingt* tot zulke ingrijpende besluiten als Tannery aanbeveelt, en men het recht heeft op onderstellingen, die het geschrift aan Euclides laten.

§ 1. De *Sectio* bestaat uit een korte, doch belangrijke *Inleiding*, en uit een *Lijf*, dat men in Ianus' uitgave in 20 paragrafen ver-

---

[1]) Ook voor dit opstel mocht de schrijver de belangstelling van Dr. Dijksterhuis ondervinden.

deeld vindt [1]): *proposities* noemt Tannery ze, en ik zal ze in het volgende óók zoo noemen.

Over de *Inleiding* spreek ik later, en thans eerst alleen over het *Lijf*, dat dan 20 proposities omvat.

In propp. 19 en 20 — de afsluiting van het werkje, zooals wij het nu hebben — gaat de oude schrijver over tot de eigenlijke *indeeling*, de *katatomê*, de *sectio* van de dubbele octaaf (want verder loopt zijn schaal niet), in 14 intervallen tusschen 15 snaren — tusschen twee opéénvolgende snaren telkens één interval — met behulp van de wiskunstige en akoustische proposities, in 1—16 ontwikkeld. Deze *katatomê* neemt weder *twee* proposities in beslag: prop. 19 leidt getallen af voor de snaarlengten [2]) der *vaste* tonen van de schaal, en prop. 20 doet hetzelfde voor de *beweeglijke* tonen.

Ik breng hier in herinnering, dat de antieke muziekleer voor het *tetrachord* den laagsten en den hoogsten toon de *vaste* tonen noemde, en de daartusschen liggende twee de *beweeglijken*. Het *tetrachord* omspande in de drie *geslachten* — het *diatonische*, het *chromatische* en het *enharmonische* — *altijd* het interval de *kwart*, 4 : 3. Bij de vereeniging van tetrachorden tot een hooger samenstel — 7-snarige lier, 8-snarige enz. — blijven de vaste tonen behouden, doch er doen zich dan wel eens verwikkelingen voor, die tot een uitbreiding van het aantal voeren. De schrijver der *Sectio* nu neemt voor zijn dubbele octaaf *negen* vaste tonen aan: den grondtoon [3]), de kwart er van (naar de hoogte), de kwint, de octaaf, de duodeciem en de dubbele octaaf, waarbij dan nog komen: de prime van den grondtoon, de prime der eerste octaaf en de lagere prime der duodeciem. De *beweeglijke* tonen liggen tusschen de vasten in, en de cijfers voor *hun* snaarlengten waren verschillend in de drie *geslachten* [4]), die echter allen de zelfde *vaste* tonen erkenden, zoo zij de schaal der dubbele octaaf aanvaardden.

---

[1]) [Porphyrius], die (op pp. 272—276 van Wallis III) het *lijf* nagenoeg woordelijk en voor het grootste gedeelte herhaalt, geeft *geen* nummers; Wallis' vertaling wel, doch wat andere dan Ianus.

[2]) Al die lengten werden als brokken van een en dezelfde lange snaar beschouwd, en komen dus onderling overeen in dikte, soortelijk gewicht en fabrikaat.

[3]) Met den *grondtoon* bedoel ik hier den *laagsten* toon, den zoogen. *proslambanomenos*, door de snaar in haar volle lengte gegeven.

[4]) Het *chromatische* geslacht wordt echter in de Sectio niet opgenomen.

Nu is het een feit, dat prop. 20 der *Sectio* voor de *beweeglijke* tonen (dáár de *pheromenoi* genoemd) de indeeling doet in den zin der *diatoniek,* en, waar de indeeling voor de *vaste* tonen (prop. 19) de drie geslachten gelijkelijk aangaat, wordt de geheele indeeling beslist *diatonisch* — wat T a n n e r y niet alleen erkent, doch juist tot uitgangspunt voor zijn beschouwing maakt.

Diatonisch, en, voeg ik er bij, diatonisch naar pythagorische (hoewel wellicht niet *primitief*-pythagorische) beginselen, naar beginselen door P l a t o 's *Timaeus* mede gesteld, en waarschijnlijk in zijn Akádemie gecanonizeerd: de beginselen, die voor den *heelen* toon, de *prime,* geen andere snaar-verhouding erkennen dan enkel en alleen de verhouding 9 : 8, en daarmee aanvaarden voor de *groote terts* de verhouding 81 : 64 (*niet* 5 : 4 of 80 : 64), en daarmee weer het beruchte *leimma,* 256 : 243, als noodwendig intervalverschil tusschen de terts 81 : 64 en de kwart 4 : 3.

T a n n e r y beweert dan, dat propp. 19 en 20 (in 't bijzonder 20) doen alsof de geheele *Sectio* het hebben wil over een *diatonische* indeeling van een dubbel-octaaf-schaal, en wel een doctrinair pythagorisch-akademische schaal. En hij beweert dat met veel schijn van gelijk, zoo men de *Sectio,* zooals zij nu vóór ons ligt, als een door propp. 19—20 afdoend gekenmerkt geschrift beschouwen moet.

§ 2. Maar, zegt T a n n e r y — en dit is zijn vondst [1]), waarvan men zich verbazen moet, dat zij niet vroeger gedaan werd — maar: propp. 17 en 18 zijn met *die* indeeling *niet* in overeenstemming, want die 17 en 18 zijn zonder twijfel in *enharmonischen* zin gedacht. En zij bewijzen, dat de opgave der *Sectio,* van het geheele geschrift, een indeeling naar *enharmoniek,* een indeeling voor een *enharmonisch* gebouwde schaal was [2]), (een besluit, waarmee alle voorafgaande proposities kloppen), en dus zijn 19—20 *niet* van dezelfde

---

[1]) Zelfs de zeer kundige en scherpzinnige I a n u s wijst, in zijn lijvige en leerzame voorrede op de *Sectio,* p. 115, op prop. 17, als zijnde een constructie-opgave, *zonder* het *enharmonische* dier opgave te noemen. Naar mij voorkomt heeft hij ook van prop. 18 het enharmonische niet begrepen, en in zijn noot p. 162 een onjuisten modernen naam aan een der snaren gegeven: *sol* in plaats van *fa.* Verg. Aanh. A.

[2]) „Cet ensemble vise exclusivement le genre enharmonique; p. 215.

Veroorloofd zij de opmerking, dat het antieke enharmonische tetrachord niet *geheel* met enharmonische intervallen gevuld was, maar alleen in dat kleine veld, dat overbleef, nadat van de *kwart* door de *lichanos* een groote terts was afgesneden. Het tetrachord behield *altijd* maar *vier* snaren in een zelfde geslacht.

hand als 1—18, en is in 19—20 de bedoeling van het oorspronkelijke werk miskend en verknoeid.

Het is van belang dit alles na te gaan.

Aan de juistheid van de *vondst,* afgescheiden van de gevolgtrekkingen, valt niet te twijfelen. Eén ding reeds volstaat om haar te bevestigen, en dát wordt met onmiskenbare woorden vastgelegd. Prop. 17 toch leert beslistelijk: [1]) de *lichanos* is *twee heele tonen* verschillend van de eerste octaaf (de *mesê*) van den *proslambanomenos,* en waar de *lichanos* de *eerste* snaar is, die naar de laagte op de *mesê* volgt [2]), eindigt de eerste octaaf (en dus ook een tetrachord) der schaal met een dubbel-heel-toon-interval, en *dit* interval is alleen in de *enharmoniek* op zijn plaats. Méér nog: dit zelfde interval wordt in prop. 18 met de zelfde waarde gebruikt, en geeft daar aanleiding tot het kleine interval, het *pyknon* (dat dan naar prop. 18 niet in twee onderling gelijke intervallen kan gesplitst worden), en dit *pyknon,* aldus maakt het bewijs van prop. 18 duidelijk, heeft de waarde van het *leimma,* en wijst dus op het kleine interval kwartdubbele toon. (Verg. Aanhangsel A.).

Er is niets aan te doen; Tannery's vondst staat wel zéér vast, en propp. 17 en 18 zijn beslist *enharmonisch,* zoo goed als (19-) 20 beslist *diatonisch* is.

§ 3. Zoo zeer ik Tannery in deze vondst beaam, zoo weinig echter kan ik met hem instemmen bij zijn gevolgtrekkingen. Niet dat zij ongerijmd zouden zijn, maar het komt mij voor, dat zij aan het *dwingende,* door den eersten schijn geleverd, bij nader overweging, veel verliezen, en er plaats blijft voor nog andere onderstellingen dan die van Tannery.

Te betreuren valt zeker, dat ons hier de vaak zoo welkome steun

---

[1]) Als β de *mesê* is, en ζ een zekere lagere toon, dan, zoo wordt bewezen, is het interval $\zeta\beta$ twee heele tonen (δίτονος), en *derhalve* (ἄρα) is ζ de *lichanos.* — Aldus in het bewijs van prop. 17. — Verg. *Aanhangsel* A.

[2]) Verg. hierbij Aristoxenos, § 49 (p. 70—73, ed Marquard): *καθόλου δ' εἰπεῖν, ἕως ἄν μένῃ τὰ τῶν περιεχόντων ὀνόματα καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀξυτέρα μέση ὑπάτη δ' ἡ βαρυτέρα, διαμενεῖ καὶ τὰ τῶν περιεχομένων ὀνόματα καὶ ῥηθήσεται αὐτῶν ἡ μέν ὀξυτέρα λιχανός ἡ δὲ βαρυτέρα παρυπάτη, ἀεὶ γὰρ τούς μεταξὺ μέσης τε καὶ ὑπάτης λιχανόν τε καὶ παρυπατήν *ἡ* αἴσθησις τίθησιν.*

Indien dus van het tetrachord de hoogste toon *mesê* heet, en de laagste *hypatê,* moet altijd, in alle geslachten, de snaar, naar de laagte op de *mesê* volgend, de *lichanos* heeten, en de daarop volgende de *parhypatê.*

van [P o r p h y r i u s] ontbreekt. Deze ijverige commentator neemt de *Inleiding* der *Sectio* grootendeels over[1]), en wat later herhaalt hij van het *lijf*, nagenoeg woordelijk, propp. 1—16,[2]) — maar helaas, verder gaat die herhaling dáár niet, en het is mij niet bekend, dat hij verderop 17—20 nog vermeldt.

Maar overigens: zoo men nu eenmaal inmenging van een latere hand wil aannemen, waarom dan is men *verplicht* die tweede hand juist bij 19—20 aan het werk te zien? Men kan even goed zeggen: 17—18 is inschuifsel, en 19—20 van den zelfden schrijver als 1—16, en afzonderlijke proposities voor de *diatonische* plaatsing der *beweeglijke* tonen waren voor een Akademicus niet noodig, wijl 20 zelf die indeeling uitvoerde.

De eerste hypothese, na die van T a n n e r y zelf, is dus dat 1—16 en 19—20 van dezelfde hand zijn, doch 17—18 inschuifsel.

Doch men kan ook meenen: 17—18 zijn *wel* van den schrijver der andere proposities, maar die schrijver vond, dat hij voor de *enharmoniek* genoeg had gedaan met zijn afleiding (in 17) van de *lichanos-plaats* uit de consonanties, en het bewijs (in 18), dat het *pyknon* niet in twee onderling gelijke verhoudingen éénmeerig[3]) te splitsen is. En men bedenke ook, dat 17 in zekeren zin overbodig was voor hen, die 20 lazen. In het *enharmonische* tetrachord toch komt de *lichanos* op de plaats der *parhypatê* van het *diatonische* tetrachord: 20 gaf dus óók reeds één snaar voor het enharmonische tetrachord, en er bleef alleen de plaatsbepaling voor de *enharmonische parhypatê* nog aan te geven, en dáárover bood 18 althans een propositie van negatieven aard aan. Wellicht vond de schrijver, dat nu genoeg was gedaan voor de *theoretische* splitsing van dat zeer kleine *pyknon*, terwijl men de *praktische* splitsing gerust aan het oor kon overlaten. Zou 18 misschien tegen A r i s t o x e n u s gericht zijn, en er op wijzen, dat *kwarttonen* theoretisch verschillen, al kan men ze praktisch onderling gelijkstellen? In allen geval: 20 gaf na 19 óók een opbouw van het enharmonische tetrachord.

Meer dan één hypothese is dus toelaatbaar, zelfs nog die, dat 17—18 oorspronkelijk *na* 19—20 kwamen; óók, dat het geschrift een *schetsmatig* werk is van E u c l i d e s, of een *onvoltooid* ge-

---

[1]) W a l l i s, II, p. 266. Over een verschil met den tekst van I a n u s wordt later door mij gesproken.
[2]) *Ibid.* p. 272—276.
[3]) Eén-meerig, d.i. de verhouding $(n+1):n$, bijv. $4:3$, $3:2$ enz.

schrift, of zelfs een *onvolkomen* werk van den grooten man: waarom geeft het geen woord over *chromatiek*?

En indien men op een of andere wijze 17—18 met 19—20 bij de geheele *Sectio*, als werk van één man, inlijfbaar acht, dan behoeft men tegen Euclides' vaderschap geen argument te zien in de aanvaarding van het *dubbele volkomen systeem*[1]), het systeem der twee octaven. Veeleer moet men zeggen: dat systeem is in de *Sectio* aangenomen, en *dus* werd het in Euclides' tijd (althans in een zekeren kring) als het aangewezen systeem beschouwd.

Mij lijkt het daarom bedenkelijk voor het *lijf* beslissend te besluiten, dat het *niet* van Euclides zou zijn, zelfs al mocht Tannery's bezwaar tegen het bewijs van prop. 2 gegrond wezen.[2])

§ 4. Maar er is ook een *Inleiding* bij de *Sectio*, en deze, kort als zij is, verdient een eigen beschouwing te over.

Wel is zij geschikt om den lezer van dezen dag radeloos te maken, en hem te doen uitroepen, wat de oude schrijver er toch aan had om niet een *weinig* uitvoeriger en daardoor *veel* duidelijker te zijn! Doch is het *plicht* om uit die beknoptheid tot een andere hand dan die van Euclides te besluiten? Mij dunkt van niet, waar toch ook Ptolemaeus bewijst, hoe licht een antiek tot zulk een beknoptheid overging, wellicht denkend, dat zijn lezers met oudere en uitvoerige geschriften wel bekend waren, en de meester daarom met een soort van uittreksel wel volstaan kon. In I 6 zijner Muziekleer geeft Ptolemaeus een paar regels over een pythagorisch inzicht[3]), waarvan men nu niets begrijpen zou, zoo [Porphyrius] ons niet met een lang bericht uit oudere werken te hulp schoot, en het geheele derde hoofdstuk van zijn eerste Boek lijdt aan een onhelderheid, die blijkbaar ook antieke lezers kwelde, wijl zij [Porphyrius] bracht tot die reeks van toelichtingen uit andere schrijvers, waarvoor wij hem dankbaar moeten zijn, maar die des te meer aan een hinderlijk opzet bij den ouderen doen denken. De onderstelling is dus volstrekt niet gewaagd, dat ook de

---

[1]) Tannery ziet hier een ernstig bezwaar: „il était assez peu compréhensible que le double système complet fut dès lors présenté comme le cadre nécessaire de la spéculation." Naar zijn meening is dat systeem, als school-voorschrift, niet wel te rijmen met Aristoxenos en de *Problemen* van [Aristoteles].

[2]) Janus echter, in een noot op p. 151, acht het bewijs zuiver, met een beroep op een stelling uit Eucl., Elem. *8*, 7 en [Porphyrius] ziet geen bezwaar, wat Tannery blijkbaar afkeurt.

[3]) In uitgave Wallis, Op. Omnia, III, p. 13—14.

Inleiding der *Sectio* iets van een uittreksel was door Euclides zelf gemaakt, een samenvatting van gangbare inzichten, verstaanbaar voor een zekere schare van leerlingen, die den meester zelf met méér woorden gehoord hadden. [1]) Maar de naneef zucht er onder, dat die *Inleiding* niet ronduit zegt, wàt het is, dat de *plêgê* uitoefent en krijgt, de lucht of de snaar; ook kwelt zij hem met het woord *kinêsis,* dat eerst beweging in het algemeen schijnt te beteekenen en vlak daarop snaar-beweging. En wat bezielde dien schrijver om geen eigen woord voor *trilling* te kiezen? Wellicht durfde hij scherpe voorstellingen en eigen woorden niet aan, daar misschien voor hem nog de *puzzle* bestond van de *stooten,* die een zekere *discontinuïteit* hebben, terwijl de *toon* daarentegen *continu* is. Wellicht —, maar weten doen wij het niet, en wij kunnen wel niet anders dan *niet veel verlangen,* en ons vasthouden aan enkele dingen, die *wel* zeker schijnen.

De Inleiding spreekt van meer *opeengedrongen* en van *ijlere* bewegingen, die *hoog* en *laag* uitwerken [2]): het kan wel niet anders of de schrijver begrijpt, dat méér stooten (aan *trilling* behoeft men nog niet te denken) in de *tijdseenheid* het effekt *hoog* hebben, en minder stooten het effekt *laag,* en dan stooten door de snaar aan de lucht gegeven, tevens bewegingen der snaar, die de stooten veroorzaken, al is men op dat punt van helderheid bij den schrijver niet geheel zeker.

En na lang staren op den tekst durft men dan ook wel een ander zinnetje [3]) vertalen als volgt:

„. . . zoodat de tonen, die hooger zijn dan goed is, bij ontspannen [= afdraaien van de snaar] door wegneming van beweging [= vermindering van het aantal stooten per tijdseenheid] de juiste hoogte

---

[1]) Een poging tot vertaling vindt men in Aanhangsel B; ook Erich Frank, in zijn *Plato und die sogenannten Pythagoreer,* 1923, vertaalde de *Inleiding* grootendeels (p. 174—175). Zie ook hierover Aanh. B.

[2]) p. 148, Janus: *τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι, καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι βαρυτέρους.*

[3]) p. 149: „*ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους τοῦ δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος, τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους προσθέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος.*

Het verdient opmerking, dat [Porphyrius], W. III, 266 hier iets anders geeft; zijn tekst echter is rijk aan varianten en dus waarschijnlijk bedorven. — Overigens geeft [Porphyrius] zelf, W. III, 216 onmiskenbaar de inlichting, dat *ἀνιέναι* en *ἐπιτείνειν* in zulk een verband beteekenen: *zwakker spannen* en *sterker spannen* van de *snaar.*

krijgen, en de tonen, die lager zijn dan goed is, bij sterker spannen [= opdraaien van de snaar] door bijtelling van beweging [= vermeerdering van het aantal stooten p. t.] hun juiste hoogte krijgen,"[1]) en dàn er zelfs iets goeds aardig in gezegd te zien.

En eindelijk is er de duidelijke verklaring: dus bestaan de tonen uit *deelen.*

Maar men moet niet alles verlangen van zulk een beknopt sprekend geschrift en met goeden wil tot redelijk verstaan meewerken. Tannery ziet dit voorbij, dunkt mij, als hij een waarachtig wiskunstenaar der 4e eeuw niet toelaat te zeggen, dat alles wat voor vermeerdering of vermindering vatbaar is, zich onderling verhoudt naar geheele getallen (*ἀριθμοῦ λόγῳ*). Ongetwijfeld zou men zulk een uitspraak bij den grooten Euclides niet verwachten, althans niet zonder toelichting. Maar die toelichting kan de lezer wel zelf inlasschen zonder te ver in fantasie te gaan, nl. door het zinnetje in verband met de omgeving en met de strekking der geheele Inleiding te lezen. Men behoeft den schrijver niet aan te zien voor een *atomist* door dik-en-dun, ook in wiskunde, die irrationeele verhoudingen niet kent of erkent. Hij denkt in de geheele Inleiding als *akoustikus,* en zelfs als akoustikus van de *snaar* en wordt daardoor als het ware *gelegenheids-atomist,* zooals wij zelf het ook zijn, wanneer wij van het *aantal trillingen* eener snaar per seconde spreken, en dan niet gekweld worden door de vraag of die aantallen ook irrationeel zich kunnen verhouden. Zoo hanteert deze antieke akoustikus wel niet de trillingen, maar dan toch de *stooten,* van wier aantal per tijdseenheid de hoogte van den toon afhangt, terwijl dit aantal steeds door een heel getal uitdrukbaar is; de *stooten* en de *bewegingen.* In die denkwijze beschouwd, verliest de uiting haar oogenschijnlijke ontoelaatbaarheid, en ik wijs er ook op, dat vele eeuwen later, toen de irrationeele verhoudingen gemeengoed van alle wiskunstenaars toch zeker wel waren, — dat vele eeuwen later Boëthius[2]) óók als musicus sprekend en waarschijnlijk hier de Inleiding parafraseerend, zonder haperen spreekt als volgt:

„Liquet additione quadam motuum ex gravitate acumen intendi, detractione vero motuum laxari ex acumine gravitatem. Ex pluribus enim motibus acumen quam gravitas constat. In quibus autem plura-

---

1) p. 215.
2) *de Musica,* I, 3.

litas differentiam facit, eam necesse est in quadam numerositate consistere. Omnis vero paucitas ad pluralitatem ita sese habet, ut numerus ad numerum comparatus."

Ook miskent Tannery m.i. het pythagorisme der Inleiding. De Pythagoreërs toch (hoewel Archytas zelf wellicht niet) meenden inderdaad, dat de consonanties aan veelvoudige of één-meerige verhoudingen gebonden waren [1]), (die dan te samen één naam droegen, door de Inleiding niet genoemd, maar door een lateren wèl: *betere* nl., *κρείττους* [2])), en dat inzicht schuilt blijkbaar in de bewering der Inleiding:

„de consonanties, die één klank van twee maken, verhouden zich natuurlijkerwijze (*εἰκός*) naar die met één naam te noemen getallen, nl. de veelvoudige en de één-meerige." [3])

Alles te samen lijkt het mij, dat er geen *dwingende* reden is ook om de *Inleiding* aan Euclides te ontnemen, en Tannery, door te veel te verlangen, zijn eigen schoone vondst geen ingang heeft doen vinden. Noch Hultsch in 1909 (Pauly—Wissowa, VI, p. 1051), noch Riemann-Einstein's lexikon van 1922, houden met zijn opstel rekening, en oogenschijnlijk dus werd ook zijn aanwijzing van de *enharmonische* proposities voorbijgezien.

Dat deze proposities echter de *Sectio* aan Euclides ontnemen, heb ik zelf in het voorgaande bestreden. Over de *Inleiding* ben ik minder zeker, want haar onmiskenbare en hinderlijke beknoptheid blijft het *mogelijk* laten, dat zij een *later* uittreksel is van allerlei, ook pythagorische geschriften.

Evenwel moet men Tannery's vondst om haar zelve blijven waardeeren.

---

1) Dit blijkt ten duidelijkste uit het pythagorische brok bij [Porph.], W. III, 280. Verg. ook mijn opstel: Een oude wiskunstige natuurwet enz.

2) Verg. Ianus, p. 118 en [Porph.] W III, 272: *τῶν .... ἀνίσων λόγων, οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ οἱ ἐπιμόριοι κρείττους τῶν ἐπιμερῶν .... ἐφαρμοστέον οὖν τοὺς ἐπιμορίους καὶ πολλαπλασίους λόγους τοῖς συμφώνοις* enz. — Ptolemaeus, W. III, p. 10 noemt ze *ἀμείνους* naar de meening der Pythagoreërs.

3) [Porphyrius'] verdere uiteenzetting van de grootere deugd der veelvoudige en één-meerige verhoudingen, doet wel denken aan de *ξύμφωνοι ἀριθμοί* van Plato's *Republiek*, VII, 531 C. Mocht Plato inderdaad zoo iets bedoeld hebben, dan zou de Inleiding niet alleen van pythagorische, maar ook van platonische invloeden getuigen, wat dan ook gewoonlijk voor het gansche werk aangenomen werd. — Theo Smyrnaeus, Hiller, p. 74—75 noemt symphonische verhoudingen op. —

Aanhangsel A.

T a n n e r y 's opstel geeft van propp. 17 en 18 geen beschouwing in bijzonderheden: hier volgt er een van mij zelf.

a. *Analyse van prop. 17.*

De *stelling* is: de *paraneten* en de *lichanoi* worden op de volgende wijze met behulp der consonanties vastgelegd.

Aldus de *stelling.* In de *analyse* (uitvoerige herhaling) beperk ik mij, evenals E u c l i d e s doet, tot de *lichanos,* [1]) terwijl ik zijn *vertikale* lijnen door *horizontale* vervang.

Gegeven zij de snaar β als *mesê.*

β = mesê ———————————— ξδ = 64.

Plaats daarboven (= naar de hoogte) als kwart de (hulp)-snaar γ, en van γ uit naar de laagte, als kwint van γ, de snaar δ, dan krijgt men:

μη = 48 ························ γ
ξδ = 64 ———————————— β
οβ = 72 ························ δ

De getallen komen in den tekst voor. γ en δ, als *hulpsnaren,* worden door *mij* gestippeld.

Dan is $\delta : \beta$ een heele toon, 9 : 8. Trek nu nog een hulpsnaar ε als hoogere kwart van δ, dan heeft men:

μη (= 48) ························ γ
νδ (= 54) ························ ε
ξδ (= 64) ———————————— β
οβ (= 72) ························ δ

De tekst zelf heeft deze getallen.

Eindelijk: trek een snaar ζ (*geen* hulpsnaar) een kwint *lager* dan ε, dan krijgt men:

μη (= 48) ························ γ
νδ (= 54) ························ ε
ξδ (= 64) ———————————— β
οβ (= 72) ························ δ
πα (= 81) ———————————— ζ

De tekst zelf heeft de getallen.

Nu is ook $\zeta\ \delta$ een heele toon, 9 : 8. En $\delta\ \beta$ is óók een heele toon, dus $\zeta\ \beta$ is een *ditonos* (*logos*), $9^2 : 8^2$.

Dus ζ is de *lichanos,* want de *lichanos* verschilt twee heele tonen van de *mesê* β.

N.B. γ, ε en δ worden alleen gebruikt als constructieve ficties, als *hulpsnaren,* om de *lichanos* te trekken, die altijd naar de laagte op de *mesê* volgt, doch alleen in het *enharmonische* tetrachord met twee heele tonen van de *mesê* gescheiden is, terwijl die twee heele tonen dan één interval maken.

---

[1]) De *paranêtê* toch is, in een ander octaaf, *gelijkstandig* met de *lichanos.*

b. Analyse van prop. 18 (met tekst en vertaling).

De taktiek van het betoog is om het *pyknon* in te sluiten tusschen twee intervallen van één heelen toon ieder, zoodat de gansche omvang der drie intervallen te samen juist *één kwart* (4 : 3) bedraagt. Daar nu 4 : 3 *één-meerig* is, heeft dit interval geen *midden*(prop. 3), en wijl de intervallen aan weerskanten van het *pyknon* even groot zijn (beiden 9 : 8), heeft het *pyknon* zelf ook geen midden: [1]) de *parhypate* echter zou, indien zij door het „midden" van het *pyknon* ging, dit *pyknon* in twee „gelijke" deelen splitsen, maar wijl het midden ontbreekt, kan de *parhypate* dat niet doen. q. e. d.

Deze taktiek kan men ook wel uit I a n u s' tekst opmaken, doch veel helderder wordt alles, zoo men in dien tekst voor de snaarteekens de lecties der *libri* terugbrengt, [2]) die I a n u s ter kwader ure door emendaties van eigen gissing verving. I a n u s heeft niet bemerkt, dat 18, evenals 17, *enharmonisch* gedacht is, zooals T a n n e r y terecht aanwees, en de *lichanos twee* heele tonen van de *mesê* af ligt. Deze vergissing blijkt beslistelijk uit zijn noot op p. 162, waar hij de *mesê a* (= la) noemt, en dan de *lichanos g* (= sol), hoewel § 17 hem had moeten waarschuwen, dat de *lichanos* f (= fa) is in de enharmoniek. [3])

Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.

ζ δ γ ε β

μη

νδ

ζδ

οβ

Ἔστω γὰρ μέση μὲν ὁ β, λιχανὸς δὲ ὁ γ, ὑπάτη δὲ ὁ δ. ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ ζ. τόνος ἄρα ὁ ζδ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ε. τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ ζδ διάστημα καὶ τὸ γε. κοινὸν προσκείσθω τὸ δγ. τὸ ἄρα ζγ ἴσόν ἐστι τῷ δε. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ ζε. οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν ζε· ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ δζ τῷ γε. οὐκ ἄρα τοῦ δγ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν. οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διελεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως οὐδὲ ἡ τρίτη.

---

[1]) Deze conclusie is juist; men kan echter meenen, dat zij nog een afzonderlijk betoog noodig heeft.

[2]) Dit gebeurt dan ook in de hier volgende tekst-herhaling.

[3]) I a n u s geeft geen handschriftelijke verdediging van zijn emendaties. — Naar ik van Dr. D i j k s t e r h u i s verneem, stemt H e i b e r g's uitgave der *Sectio* ten deze volkomen met die van I a n u s overeen, en ook aan H e i b e r g schijnt dus het enharmonische element in de *Sectio* ontgaan te zijn.

NB.[1] De tekst geeft de getallen voor ζ, δ, ε en β, doch niet voor γ; wellicht wijl het getal bij γ behoorend ($60^3/_4$), in het Grieksch niet kort te noteeren is:

$$60^3/_4 = 243 : 4 = σ'μγ \ πρὸς \ δ.$$

NB.[2] προσκείσθω is emendatie van Meibomius voor προκείσθω, en zij wordt hier overgenomen, wijl èn in Euclides' Meetkunde (bijv. I, pr. XXIX), èn in Proklos' commentaar daarop de term προσκείσθω (en juist in verbinding met κοινὴ of κοινὸν) in den zin van „opgeteld zij" gebruikelijk is, terwijl προκείσθω minder ongedwongen verklaard zou moeten worden.

Vertaling. De *parhypaten* en de *triten* verdeelen het *pyknon* niet in gelijke [deelen]. Zij toch β de *mesê*, γ de *lichanos*[1]), en δ de *hypate*[2]). Men trekke van β uit [naar de laagte] een kwint-[snaar] op ζ. En van ζ uit [naar de hoogte] een kwart-[snaar] op ε. Een heele toon is derhalve ζδ[3]) zoowel als γε[4]). Men telle nu δγ als een gemeenschaplijk [stuk bij ζδ en γε][5]). Derhalve is ζγ gelijk aan δε[6]). Een kwart nu is ζε: er is dus geen middenevenredige voor ζε, het interval is immers éénmeerig.[7]) En δζ is gelijk aan γε; niet derhalve zal er een midden zijn voor δγ[8]), dat het [interval] is van *hypate* naar *lichanos*; niet dus verdeelt de *parhypate* het *pyknon* in gelijke [deelen]. En zóó is het ook met de *tritê*.[9])

ζ δ γ ε β
48
54
($60\frac{3}{4}$)
64
72

De stippellijnen zijn door den vertaler aangebracht om de *hulpsnaren* van de eerstgegevenen te onderscheiden.

In het bewijs zijn dus eerst alleen gegeven δ, γ en β en het trekt als *hulpsnaren* ζ als lagere kwint van de *mesê* β, en ε als

---

1) In § 17 was bewezen, dat γβ twee heele tonen (81 : 64) omvat.
2) δγ is het *pyknon* (256 : 243).
3) ζδ is kwint/kwart.
4) γε is γβ (twee heele tonen), verminderd met den heelen toon βε.
5) Zoo men de lezing προκείσθω aanvaardt, moet dit zinnetje beteekenen: „voor uw oogen ligge dan δγ als het gemeenschaplijke [van ζγ en δε].
6) Dit zinnetje had wellicht kunnen ontbreken.
7) Verg. prop. 3 der Sectio.
8) = het *pyknon*.
9) Omdat de *tritê* in een hooger tetrachord *gelijkstandig* is met de parhypate in een lager.

hoogere kwart van ζ: ζ/δ en ε/β zijn dan ieder één heele toon. Voorts zijn $\zeta\varepsilon$ en $\delta\beta$ ieder een kwart, en hebben zij $\delta\gamma$, het *pyknon*, gemeen, terwijl (wat Euclides niet expliciet zegt) ook $\gamma\varepsilon$ een heele toon is. Als er nu een *midden* (evenredige) was voor ζ/ε, zou dit ook een *midden* voor δ/γ moeten zijn (dit schakel *ik* in), en dan was er een *parhypatê* met een gelijkdeelige splitsing (d. i. in gelijke verhoudingen) van het *pyknon* δ/γ. Maar ζ/ε is als kwart *één-meerig*, en laat dus *geen midden toe* (prop. 3). *Dus* heeft ook δ/γ geen *midden*, en derhalve deelt de *parhypate* het *pyknon niet* in gelijke verhoudingen.

Tot nadere toelichting nog het volgende.

1. De *parhypate* is in de figuur niet geteekend.
2. Dat $\delta\gamma$ het *pyknon* is, wordt door den tekst ten overvloede bewezen met: οὐκ ἄρα τοῦ δγ μέσος ἐμπεσεῖται enz.
3. Het zinnetje: „derhalve is $\zeta\gamma$ gelijk aan $\delta\varepsilon$" doet wat zonderling aan, daar deze conclusie in het betoog niet gebruikt wordt.
4. Er wordt in het bewijs, *zonder betoog*, aangenomen, dat de *parhypate*, als zij een *midden* maakte tusschen ζ en ε, tevens een *midden* zou geven in het *pyknon*, dus tusschen δ en γ. Dat Euclides echter gelijk heeft, kan men gemaklijk betoogen. Ik teeken hierbij evenwel aan, dat volgens Dr. Dijksterhuis zulk een aanvulling overbodig is, en de Euclidische denkwijze zijn conclusie ten deze zonder nader uitweiding toelaat.

Aanhangsel B. Vertaling van de Inleiding.[1])

Indien er rust was en bewegingloosheid, zou er stilte zijn; was er stilte en bewoog niets, dan zou niets gehoord worden: derhalve, zal er iets gehoord worden, dan moet er eerst *stoot* en beweging geweest zijn. Zoodat, daar toch alle tonen ontstaan als er een *stoot* ontstaan is, en een stoot bij geen mogelijkheid kan ontstaan zoo er niet eerst een beweging is geweest — van de bewegingen nu zijn er sommigen *dichter*, de anderen *ijler*, en de dichteren maken de tonen *hooger*, de ijleren *lager* — is het noodwendig dat [de tonen] deels *hooger* zijn, indien zij dan uit dichtere en meer [talrijke] bewegingen bestaan, deels *lager*, indien zij dan uit ijlere en minder [talrijke]

---

[1]) Men vindt een groot deel der Inleiding ook vertaald bij Erich Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer (1923), blz. 174—175. — Boëthius' de Musica, I, 3 lijkt in menigen zin een vertaling van de Inleiding.

bewegingen bestaan. Zoodat zij, die hooger zijn dan goed is bij ontspanning [van de snaar] door aftrekking van beweging het goede [= de juiste hoogte] krijgen, en zij die lager zijn [dan goed is] bij sterker spanning [van de snaar] door optelling van beweging het goede [= de verlangde hoogte] krijgen.

Daarom moet men beweren, dat de tonen uit *deelen* bestaan, daar zij dan door optelling en aftrekking hun goede [hoogte] ontvangen. Alles nu wat uit deelen bestaat, wordt gezegd onderling in verhouding van [geheel] getal te zijn, zoodat ook noodwendig de tonen onderling in verhouding van [heel] getal te zijn moeten gezegd worden.

Van de [heele] getallen nu heeten sommigen in veelvoudige verhouding te zijn, andere in één-meerige, weer anderen in veel-meerige [verhouding], zoodat ook de tonen noodwendig in zulke onderlinge verhoudingen te staan moeten gezegd worden. Van deze verhoudingen worden de onderling veelvoudigen en één-meerigen met één naam genoemd.

Wij weten ook, dat sommigen der tonen [onderling] *consoneerend* zijn, anderen *dissoneerend,* en dat de consoneerenden één mengsel uit beiden maken, de dissoneerenden niet. Waar dit nu zoo is, is het natuurlijk (εἰκός), dat de consoneerende tonen, daar zij uit beiden één mengsel van geluid maken, behooren tot de getallen, die onderling met één naam gezegd worden [zich te verhouden] en dus veelvoudig of één-meerig zijn.

N.B.[1] Bij [Porphyrius], W. III. 266 vindt men de Inleiding voor een groot deel herhaald, *zonder* vermelding van Euclides' naam. De herhaling begint bij: „alle tonen ontstaan als er een stoot ontstaan is", en houdt op met „zoodat ook de tonen . . . . moeten gezegd worden." — Het zinnetje: „zoodat zij, die hooger zijn dan goed is" enz., is bij [Porphyrius] sterk beknot, en wat er overbleef, heeft veel emendatie noodig.

N.B.[2] Tannery (218) wijst op het in deze Inleiding gestelde postulaat over de verbinding der consonanties aan de één-meerige en veelvoudige verhoudingen, als een zonderlinge verwarring van wat *nomooi* geldt en wat *physei* geldig is. Hij betwijfelt of Plato dat postulaat geheel zou hebben goedgekeurd, al schijnt de *Republiek* (VII. 531) zoo iets mogelijk te maken.

Naar mij voorkomt, ziet T. hierbij over het hoofd, hoe dit postulaat door Pythagoreërs vóór Archytas reeds aanvaard was, blijkens

[Porphyrius], W. III, 280 en het dus geenszins een bedenksel van de Inleiding was. Over het „met één naam", verg. hiervóór blz. 178.

N.B.[3] Frank (o.c. blz. 174) ziet, evenals Tannery, in de Inleiding „archyteïsches Gut". Zij beiden echter kennen aan Archytas het besef van het begrip *trilling* toe, wat m.i. noch door het bekende groote fragment van Archytas, noch door de uiting bij Theo Smyrnaeus, Hiller, blz. 61, r. 11—16, voldoende gewaarborgd is. Verg. over dit alles mijn opstel *een foutieve Natuurwet,* in Euclides; '28—'29, nr. 4, blz. 189—192 (waarin ik echter Tannery volgde in zijn athetese der Sectio), alsmede *Een oude wiskundige Natuurwet* enz. aanhangsel.

Ik zie ook niet met Frank (o. e. 175) in de Inleiding een invloed van Demokritos, wijl ik den schrijver als een *gelegenheids-atomist* opvat, die hier alleen om de leer der *tonen* denkt, en wel der *snaar*-tonen.

DE OPLEIDING TOT LEERAAR IN WIS- EN NATUURKUNDE VOLGENS DE PLANNEN VAN DE COMMISSIE-SIJMONS [1])

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

In de eerste dagen van dit jaar verscheen een rapport over de opleiding tot leeraar, uitgebracht door een commissie, die zich in opdracht van de samenwerkende vereenigingen van leeraren en onder leiding van Prof. Sijmons had beziggehouden met het oude en moeilijke vraagstuk, hoe er een einde zou kunnen worden gemaakt aan den verwonderlijken en ongewenschten toestand, dat de Nederlandsche leeraren den werkkring, die hun levenstaak zal worden, beginnen zonder een spoor van hetzij practische, hetzij theoretische voorbereiding tot hun ambt. Het verschijnen van dit rapport lijkt mij om verschillende redenen een feit van groote beteekenis in de geschiedenis van het Nederlandsche Onderwijs. Het is een bewijs, hoe onder de leeraren bij het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs, die in groote meerderheid jaren lang met volstrekte onverschilligheid tegenover het vraagstuk van de opleiding hebben gestaan, het besef begint te groeien, dat het belang van het onderwijs eischt, dat volgende generaties van docenten niet even onvoorbereid hun moeilijke en verantwoordelijke betrekking zullen aanvaarden, als zij dat indertijd zelf hebben moeten doen. Het wijst verder een weg aan ter oplossing van het al zoo vaak besproken probleem, die met goeden wil begaanbaar zal blijken en het zal daardoor de onderwijsautoriteiten beletten, zich van de verplichting, op dit gebied een voorziening te treffen, af te maken met zoo onredelijke argumenten, als er in de Memorie van Toelichting van het thans nog

[1]) Voordracht, gehouden in de Algemeene Bijeenkomst van Leeraren in Wiskunde te Utrecht op 5 April 1930.

vigeerend wetsontwerp ter regeling van het V.H. en A.V.M.O. tegen de mogelijkheid van een van overheidswege geregelde opleiding worden aangevoerd. En het weerlegt krachtens zijn samenstelling door een commissie, waarin Openbaar en Bijzonder Onderwijs gelijkelijk vertegenwoordigd waren, voor goed de bewering, dat de verschillen in levensbeschouwing, die zich in de verschillende vormen van ons schoolwezen openbaren, een beletsel zouden vormen om tot een algemeen aanvaardbare oplossing te komen.

Er zou in dit alles reeds voldoende aanleiding zijn, de voorstellen van de commissie—Sijmons op deze algemeene bijeenkomst van leeraren in wiskunde ter sprake te brengen en reeds daarom heb ik dan ook gaarne de taak op mij genomen, een gedachtenwisseling hierover in te leiden. Een bijzonder motief, om ze hier te bespreken, ligt echter nog hierin, dat het rapport uit den aard der zaak, namelijk wegens zijn samenstelling door een commissie, waarin in de eerste plaats schooltypen en slechts als bijkomstige omstandigheid vakgroepen waren vertegenwoordigd, zich beperkt tot het aangeven van de groote lijnen der ontwikkelde denkbeelden en dat het niet ingaat op de uitwerking dier denkbeelden voor de verschillende speciale vakken. Ik stel mij voor, deze leemte hier vanmiddag eenigszins aan te vullen, wat de wis- en natuurkunde betreft en dus uiteen te zetten, hoe men zich de practische toepassing van de voorstellen der commissie—Sijmons op de opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde kan denken.

Het zal u bekend zijn, dat het vraagstuk van de opleiding tot leeraar in deze vakken reeds een aantal jaren lang onderwerp van studie heeft uitgemaakt. De commissie—Beth heeft er twee rapporten aan gewijd, die o.a. ten gevolge hebben gehad, dat de vier vereenigingen van leeraren in wiskunde, waarvan deze algemeene bijeenkomst uitgaat, gezamenlijk een nieuwe commissie hebben ingesteld, die onder leiding van den heer Verrijp een plan voor de opleiding heeft uitgewerkt en die bovendien door een tot de A.V.M.O. en het Genootschap gericht verzoek de onmiddellijke aanleiding heeft gegeven tot de instelling van de commissie—Sijmons. Het ligt voor de hand, dat de plannen, die ik hier zal ontwikkelen, in beginsel niet veel anders zullen bevatten, dan er reeds in de rapporten van de commissies—Beth en Verrijp te lezen staat. Toch lijkt het mij de moeite waard, de daarin uitgesproken denk-

beelden nog eens onder oogen te zien, ze door toelichtingen en voorbeelden te verduidelijken en na te gaan, hoe ze in het kader van de voorstellen van de commissie—Sijmons zouden kunnen worden verwezenlijkt.

Ik wil beginnen met u eerst even de hoofdzaken van deze voorstellen, zooals ze voor alle vakken gelden, in het kort te schetsen.

Op den voorgrond staat daarbij een splitsing van de opleiding in een paedagogisch en een didactisch gedeelte, een splitsing, die bezwaarlijk volkomen nauwkeurig in woorden kan worden omschreven, maar die in wezen hierop neerkomt, dat de paedagogische opleiding de theoretische voorbereiding op het leeraar-zijn in het algemeen moet vormen, terwijl de didactische de zoowel theoretische als practische voorbereiding moet geven tot het leeraar-zijn in een bepaalde wetenschap.

Op het gebied van de paedagogiek nu hebben wij voorgesteld, dat de a.s. leeraar verplicht zou worden tot het volgen van een eenjarig college in de theoretische paedagogiek, waarin na een algemeene orienteerende inleiding speciale aandacht zal worden geschonken aan hetzij de psychologische studie van die categorieën van leerlingen, waarmee de a.s. leeraar zal hebben om te gaan, hetzij aan de historische ontwikkeling van het humanistische en middelbaar onderwijs. Het is de bedoeling, dat deze colleges zullen worden gegeven door de hoogleeraren in de paedagogiek, dat er geen tentamen of examen op zal behoeven te volgen, maar dat zal kunnen worden volstaan met het overleggen van een testimonium.

Het zal u opvallen, dat dit een zeer gematigd voorstel is. We hebben dit met opzet zoo ingericht, omdat de meeningen over de practische waarde, die de beoefening van de theoretische paedagogiek voor den a.s. leeraar kan hebben, in onderwijskringen nog zoo buitengewoon sterk uiteenloopen. Sommigen, die aan een leeraar in de eerste plaats den eisch stellen, dat hij een degelijk psychologisch geschoold opvoeder zal zijn, beschouwen de paedagogische vorming als het hoofdbestanddeel van de leeraarsopleiding. Anderen daarentegen hechten daaraan niet de minste waarde en vreezen veeleer voor de gevaren van psychologisch dilettantisme. Onder deze omstandigheden en vooral ook omdat de overtuigde voorstanders van de waarde eener paedagogische vorming voor den a.s. leeraar, die de commissie telde, van allen dwang op dit gebied afkeerig bleken, hebben we gemeend, niet verder te moeten gaan,

dan tot het voorstel, dat ik u zoojuist schetste. Het komt mij voor, dat niemand hiertegen bezwaar zal kunnen maken. Het zal den a.s. leeraar toch waarlijk geen kwaad doen, indien hij althans eens kennis maakt met de resultaten der moderne paedagogiek.

Veel beslister van aard, veel ingrijpender in hun consequenties en veel meer bindend in hun voorschriften zijn daarentegen onze voorstellen op het gebied van de didactiek. Ik bespreek deze eerst voor het geval van de universitaire opleiding, om daarna de mogelijkheid van hun toepassing op de andere soorten van opleiding te overwegen.

De didactische vorming, die wij voor den a.s. leeraar verlangen, kan in drie gebieden worden verdeeld: a) hij moet de later te doceeren leerstof op wetenschappelijke wijze hebben bestudeerd; b) hij moet op de hoogte zijn van de methoden, die voor het onderwijs in zijn vakken ter beschikking staan en met de moeilijkheden, die bij de practische toepassing van die methoden rijzen; c) hij moet ten slotte practisch geoefend zijn in het lesgeven en in den omgang met de leerlingen en ervaring hebben opgedaan over de organisatie van de school. Ik zal deze drie gebieden verder kortweg aanduiden met: a) kennis van het vak; b) methodiek; c) practische oefening.

De verzorging van deze didactische vorming nu zal voor een deel moeten toevallen aan de hoogleeraaren in de faculteit van wis- en natuurkunde. Echter niet in dien zin, dat van hen het geven van speciale didactische colleges zou worden verlangd. En wel om twee verschillende redenen niet. In de eerste plaats zal hun voornaamste taak toch altijd blijven bestaan in de wetenschappelijke vorming van den student; zij moeten zorg dragen, dat de doctorandus op een peil staat, dat met de actueele phase der wetenschap in overeenstemming is en dat is een taak, die bij de snelle ontwikkeling van de wis- en natuurkundige wetenschappen zooveel eischt, dat men van iemand, die haar waarlijk goed vervult, bezwaarlijk meer kan vergen. In de tweede plaats kunnen speciale didactische colleges van de hoogleeraren hierom niet verwacht worden, omdat zij in vele gevallen niet beschikken over de ervaring van het Middelbaar Onderwijs, die daarvoor onontbeerlijk is, terwijl voor het geval, dat zij die ervaring wel bezeten hebben, het gemis aan dagelijksch contact met het schoolleven hen toch niet tot de meest geschikte personen maakt, om den a.s. docent werkelijk op zijn ambt voor te bereiden.

Dit neemt nu echter niet weg, dat de hoogleeraren veel voor de didactische vorming kunnen doen, namelijk door bij de keuze van de te behandelen onderwerpen rekening te houden met de vraag, van welke gebieden een diepgaande kennis voor den a.s. docent van belang moet worden geacht en door zich bij de behandeling van die onderwerpen voortdurend bewust te blijven van het motief, dat tot die keuze heeft gevoerd. Het is natuurlijk niet mogelijk, volledig op te sommen, hoe dit in zijn werk zou moeten gaan. Ik volsta dus met enkele voorbeelden en wel eerst van gebieden der wiskunde, die, op geschikte wijze behandeld, er toe zullen kunnen bijdragen, dat de docent een ruimeren kijk verkrijgt op de later te doceeren leerstof. Ik noem hiervan: axiomatica, leer der verzamelingen, groepentheorie, functietheoretische behandeling van de in het middelbaar onderwijs optredende functies. Dan van speciale punten, die daarbij ter sprake zouden kunnen worden gebracht, zonder dat daardoor het wetenschappelijk karakter van de uiteenzetting zou worden aangetast: ik denk aan een uiteenzetting van het verschil in beteekenis, die het woord bewijzen heeft voor een axiomaticus en voor een pas beginnenden leerling van een M. S.; aan een bespreking van de principieele moeilijkheden, die zich voordoen bij de invoering van logarithmeneming als omkeering van de machtsverheffing, wanneer men over geen andere dan elementair-mathematische begrippen en hulpmiddelen te beschikken heeft. Of, om tot een verwant gebied over te gaan: de a.s. mechanica-docent zal er mee gebaat zijn, indien op een college mechanica de noodige aandacht wordt besteed aan de fundeering van de mechanica van Newton, zoodat deze moeilijke kwestie niet, zooals maar al te vaak is gebeurd, verdwijnt in den afgrond, die het H. O. van het M. O. scheidt en waarin zooveel verdwijnt, dat men op de M. S. niet behandelt, omdat het te moeilijk is en aan de Universiteit niet, omdat iedereen dat natuurlijk wel weet. Ik laat het hierbij. Wat de hoogleeraren tot de didactische vorming zullen kunnen bijdragen, hangt ten slotte toch uitsluitend van hun gezindheid af. Zij doen hun didactischen plicht, indien ze slechts de overtuiging bezitten, dat zij geen wetenschappelijke onderzoekers hebben te kweeken, die later bovendien toevallig ook nog leeraar worden, maar dat ze hun studenten tot wetenschappelijk gevormde leeraren moeten maken en indien ze bovendien naar die overtuiging handelen.

De hoofdzaak van de didactische opleiding zal nu echter moeten

komen voor rekening van speciaal daartoe aangestelde functionarissen, die we ons gedacht hebben als ervaren docenten, die in een universiteitsstad aan een H.B.S. of Gymnasium een beperkte leeraarstaak vervullen en die daarnaast als lector voor de didactiek van het door hen onderwezen vak aan de universiteit werkzaam zijn. Zij zullen door hun colleges er toe moeten medewerken, dat de a.s. docent, als hij de universiteit verlaat, het door hem te geven vak werkelijk beheerscht; zij zullen op de school, waaraan ze verbonden zijn, de practische oefeningen moeten leiden en ze zullen, deels op colleges, deels in besprekingen op school, de methodische ontwikkeling van den candidaat-leeraar moeten verzorgen. Zoo zou althans de meest gewenschte toestand zijn. De mogelijkheid bestaat echter, dat het practisch noodzakelijk zal kunnen blijken, deze werkzaamheid te splitsen door aan verschillende scholen bij speciaal daartoe aan te wijzen docenten gelegenheid tot het verkrijgen van practische oefening te geven.

Het is nu een punt van principieel belang, welke plaats deze didactische opleiding in het kader van de universitaire studie zal moeten innemen. Het voorstel van de Commissie luidt op dit punt aldus, dat zij zal worden beschouwd als noodzakelijk bijvak voor een doctoraal-examen, waaraan onderwijsbevoegdheid verbonden zal zijn. De a.s. leeraar zal dus naast zijn hoofdvak, inplaats van twee, nog slechts een zuiver wetenschappelijk bijvak behoeven te kiezen, terwijl het andere zal bestaan in de didactiek (dit woord dan op te vatten in den straks omschreven ruimen zin) van het hoofdvak. Het is dan de bedoeling, dat onderwijsbevoegdheid in het andere bijvak zonder speciale didactische opleiding zal worden gegeven. Ik wil niet verhelen, dat ik dit laatste hoogst ongewenscht zou vinden. Aan onderwijsbevoegdheden op grond van bijvakken zijn toch al groote bezwaren verbonden, omdat zulk een bijvak vaak niet de volle belangstelling van den candidaat heeft en dus gevaar loopt, als bijzaak behandeld te worden. Men zou dan juist een degelijke didactische voorbereiding als correctief wenschen.

Uit den aard der zaak geeft het rapport der commissie—Sijmons niet aan, hoe nu eigenlijk de didactische colleges voor de verschillende vakken zullen moeten worden gegeven. Toch is het een zeer belangrijke, ja voor een eventueel welslagen van onze plannen vitale kwestie, dat dit duidelijk wordt omschreven. Men ontmoet namelijk geregeld een bepaalde tegenwerping tegen het plan, de didactiek

als bijvak voor het doctoraal-examen te laten fungeeren, die noodzakelijk weerlegging eischt en die eigenlijk uit niets anders voorkomt dan uit onbekendheid met de waarde, die een behoorlijke beoefening van de didactiek kan bezitten. Die tegenwerping is feitelijk tweezijdig: van den kant van de universiteit luidt ze aldus: is de didactiek een vak van voldoenden inhoud en voldoend wetenschappelijk peil, om haar te kunnen toelaten als bijvak op een doctoraal-examen? En van den kant van het onderwijs wordt ze als volgt geformuleerd: kan men deze didactiek zoo geven, dat er voor den a.s. leeraar eenig practisch nut van te verwachten is? Het ziet er voor ons plan kwaad uit, wanneer het niet gelukt, deze dubbele tegenwerping afdoende te ontzenuwen. De universiteit zal het verwerpen, als het te practisch is en de practijk van het onderwijs, wanneer het te universitair lijkt. Ik zal die weerlegging trachten te geven, door thans aan de hand van voorbeelden te schetsen, hoe men zich een college over didactiek ingericht zou kunnen denken.

Ik begin daartoe met de beschouwing van het punt a), kennis van het vak, en wel in de eerste plaats voor de meetkunde.

De candidaat in wis- en natuurkunde, die voor zijn doctoraal-examen het didactisch college begint te volgen, zal naar alle waarschijnlijkheid in de kennis van de elementaire meetkunde niet veel verder zijn gekomen dan toen hij zijn studie begon, d.w.z. hij bezit een op school verworven, dus uit den aard der zaak zeer onvolledige en oppervlakkige kennis van planimetrie en stereometrie; in de beheersching van de elementair-geometrische bewijsmethoden en in de vaardigheid wat het oplossen van vraagstukken betreft, zal hij wellicht achter staan bij iemand, die de acte KI heeft behaald en hij zal in het algemeen wel volkomen onbekend zijn zoowel met de wordingsgeschiedenis als met de moderne ontwikkeling van het vak. Dit zijn alle leemten, die noodzakelijk moeten worden aangevuld; de beginnende leeraar zal toch zorg moeten dragen, dat hij de te doceeren stof souverein beheerscht, dat hij de cultuurhistorische beteekenis van die stof beseft en dat hij zelf in volkomen vorm weet, wat hij in onvolkomen vorm doceert. De leider van het didactisch college zal hier dus stof in overmaat vinden. Hij zal kunnen beginnen met de behandeling van het oorspronkelijke werk van Euclides; hij zal kunnen wijzen op den ontzaglijken invloed, dien dit werk op vorm en inhoud van onze elementaire meetkunde heeft uitgeoefend, daarnaast echter ook op de groote principieele verschillen,

waardoor de tegenwoordige schoolmethode zich van de Euclidische onderscheidt als gevolg van de verruiming van het getalbegrip in de nieuwere tijden en van de daardoor veroorzaakte sterkere toepassing van arithmetische en algebraïsche begrippen en methoden in de meetkunde; hij zal kunnen spreken over de vele punten, waarop onze leerboeken inzake exactheid bij het werk van Euclides ten achter staan en op de minder talrijke, maar uiterst belangrijke, waarop zij het in methodisch opzicht hebben verbeterd. De kritische behandeling van de *Elementen* zal dan vanzelf verder voeren. Het parallelenpostulaat geeft aanleiding om over de niet-Euclidische meetkunde te spreken, waarvan de kennis voor den meetkundeleeraar al even onmisbaar mag heeten als die van de Euclidische zelf. Ik neem aan, dat de leider van het didactische college hierbij zal kunnen aanknoopen bij de algemeene begrippen en inzichten, die op de colleges van den hoogleeraar in meetkunde zullen zijn aangebracht, dat zijn hoorders dus in het bijzonder het algemeene begrip van een niet-Euclidische meetkunde bezitten. Zijn taak zal het dan zijn, het hierdoor gevormde kader op te vullen met de werkelijke kennis van den inhoud dier meetkunden, zooals die verkregen kan worden met behulp van de elementair-geometrische methoden. Want daarop komt het voor den a.s. leeraar vooral aan; hij moet hebben leeren overwegen, wat er van de verschillende stellingen van de Euclidische Meetkunde al dan niet overblijft, als men een of meer van hare axiomata laat vallen of door andere vervangt. Dit zal de soepelheid van zijn meetkundig denken bevorderen en zijn inzicht in den bouw van de Euclidische Meetkunde verdiepen.

Het zou mij te ver voeren, om op deze wijze een volledige schets te geven van de onderwerpen, die naar aanleiding van de studie van de *Elementen* ter sprake zouden kunnen worden gebracht. Ik noem dus verder zonder eenige aanspraak op volledigheid nog enkele losse punten. Men heeft dan ten eerste de straks reeds even vermelde uitbreidingen van het getalbegrip, waarbij speciaal voor de meetkunde nog de vraag optreedt naar de mogelijke wijzen van behandeling van het begrip verhouding van onderling onmeetbare grootheden, waarbij immers het irrationaliteitsverschijnsel voor het eerst voorkomt. De methodologische bespreking daarvan zal natuurlijk onwillekeurig ook tot methodische beschouwingen aanleiding kunnen geven, namelijk tot overweging van de vraag, welk standpunt men in het onderwijs tegenover het irrationaliteitsverschijnsel zal moeten